马世祥/编著

矢量代数与射影几何

SHI LING DAI SHU YU
SHE YING JI HE



兰州大学出版社
LANZHOU UNIVERSITY PRESS

责任编辑/张爱民
封面设计/赵 会

ISBN 7-311-02866-3

9 787311 028664 >

ISBN7-311-02866-3/O·192 定价：12.80元

马世祥/编著

矢量代数与射影几何

SHI LING DAI SHU YU
SHE YING JI HE



兰州大学出版社
LANZHOU UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

矢量代数与射影几何/马世祥编著 .—兰州:兰州大学出版社,2006.6

ISBN 7-311-02866-3

Ⅰ.矢... Ⅱ.马... Ⅲ.①向量(数学)—代数 ②射影几何 Ⅳ.①O151.24 ②O185.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 087102 号

矢量代数与射影几何

马世祥 编著

兰州大学出版社出版发行

兰州市天水南路 222 号 电话:8912613 邮编:730000

E-mail:press@onbook.com.cn

http://www.onbook.com.cn

兰州大学出版社激光照排中心照排

兰州奥林印刷有限责任公司印刷

开本:850×1168 1/32 印张:4.875

2006 年 7 月第 1 版 2006 年 7 月第 1 次印刷

字数:120 千字 印数:1~1000 册

ISBN7-311-02866-3/O·192 定价:12.80 元

内 容 提 要

本书是作者根据多年从事解析几何与高等几何等课程的教学经验，结合使用过的讲义和习题课教材，综合编写而成。内容包括：矢量代数的复习，欧氏几何的推广，仿射几何学，一维射影几何学，二维射影几何学，射影理论在二次曲线中的应用。书末安排了综合复习题并给出了综合复习题和习题的提示与答案。

前言

《高等几何》是高等学校特别是师范院校数学专业的基础课之一，与《初等几何》、《解析几何》、《高等代数》等有紧密的联系，其主要内容为射影几何学。它对未来中小学教师在几何方面基础的培养、观点的提高、思维的灵活、方法的多样等起着重要作用。

本书是作者根据多年从事《解析几何》与《高等几何》等课程的教学经验，结合所使用过的讲义和习题课教材，综合修改编写而成。本书内容丰富，叙述简要，层次分明，结构严谨，是一本颇具特色的专业论著：第一，以矢量为工具，用变换群的观点和不变量的理论，对射影几何的研究对象、方法、特征和意义做了概括阐述，从而将“矢量代数”与“射影几何”有机地结合为一体。第二，将培养能力和发展智力放在首位，有利于实施素质教育，以提高创造性思维能力，特别是精心选编了大量典型的例题和习题，帮助读者理解和掌握形、数结合的思想和方法。第三，内容讲述详略合理，重点、难点突出，针对性强，便于阅读理解。

本书对《高等几何》与《初等几何》的联系做了适当的补充和阐述；对现行教材中过于复杂繁琐的部分进行了适当的简化；明确指出了各章的主要内容、目的要求、重点难点、重要结论和公式等；对易于混淆的概念互相比较，对照分析；书末还安排了综合复习题，并给出了习题和综合复习题的提示与答案，这样会大大减少读者阅读时的困难。

本书的策划与编写，始终得到了梁延堂教授的关心和帮助，他

审阅了本书全稿并提出了许多宝贵意见；院、系两级领导热情地支持本书的编写出版工作；出版社的同志也辛勤工作，提供方便，在此一并表示诚挚地谢意。编写过程中参考了目前常用的一些高等几何教材，谨向编者致谢。

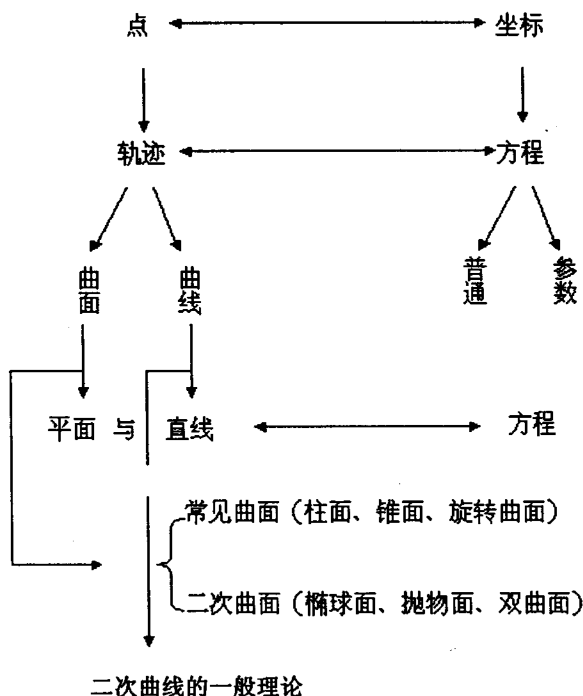
编者
于兰州城市学院
2006年4月

目　录

第一章　矢量代数的复习

本章的主要目的是简要复习矢量代数的基本知识，以便在后面的学习中应用.

解析几何的基本思想是用代数方法解决几何问题，矢量代数作为解析几何的主要内容，是实现这一思想的基本工具. 这里有必要首先对解析几何的主要内容及其结构关系作简要复习：



§ 1.1　矢量的概念与线性运算

一、矢量概念

1. 矢量：

既有大小又有方向的量叫做矢量，或称为向量，简称矢. 而只有大小的量叫做数量，或称为标量.

2. 矢量的表示：

用有向线段来表示矢量，有向线段的始点与终点分别叫做矢量的始点与终点，有向线段的方向表示矢量的方向，有向线段的长度代表矢量的大小. 用 $\overrightarrow{AB}, \vec{a}, \vec{x}$,…来记矢量.

3. 矢量的模：

矢量的大小称为矢量的模，亦称长度. 用 $|\overrightarrow{AB}|$，$|\vec{a}|$，$|\vec{x}|$，…来表示.

4. 一些特殊矢量：

(1) 零矢 $\vec{0}$，模为零，方向不定.

(2) 单位矢 $\overrightarrow{a^{\circ}}$，模为 1，与矢量 $\vec{a}$ 方向相同.

(3) 平行矢 $\vec{a} /\!/ \vec{b}$，$\vec{a}, \vec{b}$ 所在直线平行.

(4) 相等矢，模相等，方向相同.

(5) 自由矢，始点任意，只由模与方向确定的矢量.

(6) 相反矢，模相等，方向相反.

(7) 共线矢，平行于同一直线的一组矢量.

(8) 共面矢，平行于同一平面的一组矢量.

二、矢量的加法

1. 加法法则：

(1) 三角形法则　　设已知矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，以空间任意一点 O 为

始点接连作矢量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$得一折线$OAB$，从折线的端点$O$到另一端点$B$的矢量$\overrightarrow{OB}=\vec{c}$，叫做两矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的和，记做$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

(2) 平行四边形法则　如果以两个矢量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$为邻边组成一个平行四边形$OACB$，那么对角线矢量$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$叫做矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的和.

2. 运算规律：

(1) 交换律　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；

(2) 结合律　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$；

(3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$；

(4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

3. 多边形法则：

有限个矢量$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$相加，自任意点$O$开始，依次作$\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{a}_2,\cdots,\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\vec{a}_n$，得一折线$OA_1A_2\cdots A_n$，于是矢量$\overrightarrow{OA_n}=\vec{a}$就是$n$个矢量$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$的和

$$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n,$$

即

$$\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}.$$

特别地，当A_n与O重合时，$\vec{a}=\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$.

4. 矢量减法：

(1) 设矢量$\vec{b}$与$\vec{c}$的和等于矢量$\vec{a}$，即$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$，那么矢量$\vec{c}$叫做矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的差，记做$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$，由矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$求它们的差$\vec{a}-\vec{b}$的运算叫做矢量减法.

(2) 减去一个矢量等于加上它的相反矢量，即有

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

5. 三角不等式：

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$，　$|\vec{a}-\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$；

(2) $|\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n|\leqslant|\vec{a}_1|+|\vec{a}_2|+\cdots+|\vec{a}_n|$.

三、矢量的数乘

1. 数乘的定义：

实数λ与矢量$\vec{a}$的乘积是一个矢量，记做$\lambda\vec{a}$，它的模$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$；$\lambda\vec{a}$的方向，当$\lambda>0$时与$\vec{a}$相同，当$\lambda<0$时与$\vec{a}$相反.

$\lambda\vec{a}=\vec{0}$的充要条件是$\lambda=0$或$\vec{a}=\vec{0}$.

设$\vec{a}\neq\vec{0}$，则$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^{\circ}$或$\vec{a}^{\circ}=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$.

2. 运算规律：

(1) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

(2) 结合律　$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$.

(3) 第一分配律　$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$.

(4) 第二分配律　$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

3. $\vec{a}+\vec{b}$与$m\vec{a}\,(m\in R)$满足：

I-1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$,

I-2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$,

I-3. 存在一个零矢量$\vec{0}$，满足$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$,

I-4. 每一个矢量$\vec{a}$都有相反矢量$(-\vec{a})$，使$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;

II-1. $1\vec{a}=\vec{a}$,

II-2. $m(n\vec{a})=(mn)\vec{a}$,

II-3. $(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$,

II-4. $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$.

如果仅从运算法则着眼，而不考虑矢量的具体含义，则凡是具有两种运算加法和数乘，并满足上述一系列运算规律的元素的集合，叫做实数域上的线性空间（亦称矢量空间或向量空间）.

四、矢量的线性关系与矢量的分解

1. 矢量的加法和数与矢量的乘法统称为矢量的线性运算.

2. 由矢量$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$与数量$\lambda_1$，$\lambda_2$，…，$\lambda_n$所组成的矢量$\vec{a}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n$叫做矢量$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$的线性组合.我们也说矢量$\vec{a}$可以用矢量$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$线性表示，或者说，矢量$\vec{a}$可以分解成矢量$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$的线性组合.

3. 如果矢量$\vec{e}\neq\vec{0}$，那么矢量$\vec{r}$与矢量$\vec{e}$共线的充要条件是$\vec{r}$可以用矢量$\vec{e}$线性表示，或者说$\vec{r}$是$\vec{e}$的线性组合，即$\vec{r}=x\vec{e}$，且系数x被$\vec{e}$，$\vec{r}$唯一确定. $\vec{e}$称为用线性组合来表示共线矢量的基底.

4. 如果矢量$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$不共线，那么矢量$\vec{r}$与$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$共面的充要条件是$\vec{r}$可以用矢量$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$线性表示，或者说矢量$\vec{r}$可以分解成矢量$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$的线性组合，即$\vec{r}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$，且系数$x,y$被$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{r}$唯一确定. $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$称为平面上矢量的基底.

5. 如果矢量$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$不共面，那么空间任意矢量$\vec{r}$可以由矢量$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$线性表示，或者说矢量$\vec{r}$可以分解成矢量$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$的线性组合，即$\vec{r}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}+z\vec{e_3}$，且系数$x,y,z$被$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$, $\vec{r}$唯一确定. $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$称为空间矢量的基底.

6. 对于$n\,(n\geqslant1)$个矢量$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_n$，如果存在不全为零的n个数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，使得

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0},$$

那么n个矢量$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_n$叫做线性相关. 矢量$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_n$线性无关是指，只有当$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$时，上式才成立.

7. 一个矢量$\vec{a}$线性相关的充要条件是$\vec{a}=\vec{0}$.

8. 在$n\geqslant2$时，矢量$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_n$线性相关的充要条件是其中有一个矢量是其余矢量的线性组合.

9. 如果一组矢量中的一部分矢量线性相关，那么这一组矢量

就线性相关.

10. 一组矢量中如果含有零矢量，那么这组矢量必线性相关.

11. 两矢量共线的充要条件是它们线性相关.

12. 三矢量共面的充要条件是它们线性相关.

13. 空间任何四个矢量总是线性相关.

14. 空间四个以上矢量总是线性相关.

§1.2 标架与坐标系

一、标架与坐标

1. 空间中的一个定点 O，连同三个不共面的有序矢量$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$的全体，叫做空间中的一个标架，记做$\{O;\vec{e_1},\vec{e_2}\ \vec{e_3}\}$. 如果$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$都是单位矢量，那么$\{O;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$叫做笛卡尔标架；$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$两两相互垂直的笛卡尔标架叫做笛卡尔直角标架，简称直角标架；在一般情况下，$\{O;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$叫做仿射标架.

2. 对于标架$\{O;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$，如果$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$间的相互关系和右手拇指、食指、中指相同，那么这个标架叫做右旋标架或称右手标架；如果$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$间的相互关系和左手的拇指、食指、中指相同，那么这个标架叫做左旋标架或称左手标架. 如图1.1.

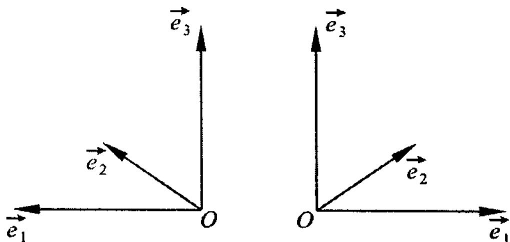


图 1.1

3. 表达式$\vec{r}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}+z\vec{e_3}$中的 x, y, z 叫做矢量$\vec{r}$关于标架$\{O;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$的分量或称为坐标，记做$\vec{r}\{x,y,z\}$或$\{x,y,z\}$.

4. 对于取定了标架$\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$的空间中任意点$P$，矢量$\overrightarrow{OP}$叫做点$P$的径矢，径矢$\overrightarrow{OP}$关于标架$\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$的分量$x, y, z$叫做点$P$关于标架$\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$的坐标，记做$P(x, y, z)$或$(x, y, z)$.

5. 当空间取定标架$\{O;\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3}\}$之后，空间全体矢量的集合或者全体点的集合与全体有序三数组x, y, z的集合具有一一对应的关系，这种一一对应的关系叫做空间矢量或点的一个坐标系. 空间坐标系也常用$\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$来表示，此时点$O$叫做坐标原点，$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$都叫做坐标矢量.

6. 由右(左)旋标架决定的坐标系叫做右(左)旋坐标系或右(左)手坐标系；仿射标架、笛卡尔标架与直角标架所确定的坐标系分别叫做仿射坐标系、笛卡尔坐标系与直角坐标系.

7. 约定用$\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$表示直角坐标系，以后在讨论空间问题时所采用的坐标系，一般都是空间右手直角坐标系.

8. 过点O沿着三坐标矢量$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$的方向引三轴Ox, Oy, Oz,可以用这三条具有公共点O的不共面的轴Ox, Oy, Oz来表示空间坐标系，记做$O—xyz$，此时点O叫做空间坐标系的原点，三条轴Ox, Oy, Oz都叫做坐标轴，且依次叫做x轴，y轴和z轴，每两条坐标轴所决定的平面叫做坐标面，分别叫做xOy平面，yOz平面与xOz平面. 三坐标平面把空间划分为八个区域，每一个区域都叫做卦限.

9. 平面上一个定点O, 连同两个不共线的有序矢量$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$的全体，叫做平面上的一个标架，记做$\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$，如果$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$都是单位矢量，那么$\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$叫做笛卡尔标架；$\overrightarrow{e_1}$与$\overrightarrow{e_2}$相互垂直的笛卡尔标架叫做笛卡尔直角标架，简称直角标架；在一般情况下，$\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$叫做仿射标架.

10. 对于标架$\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$，将$\overrightarrow{e_1}$绕$O$旋转，使$\overrightarrow{e_1}$的方向以最近

的路径旋转到与$\vec{e_2}$的方向相合时，如果旋转方向是逆时针的，则这种标架叫做右旋标架或称右手标架；如果旋转方向是顺时针的，则这种标架叫做左旋标架或称左手标架. 如图 1.2.

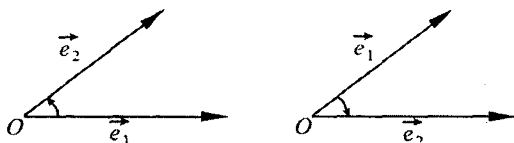


图 1.2

11. 表达式$\vec{r}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$中的 x, y 叫做矢量$\vec{r}$关于标架$\{O;\vec{e_1},\vec{e_2}\}$的分量或称为坐标，记做$\vec{r}\{x,y\}$或$\{x,y\}$.

12. 对于取定了标架$\{O;\vec{e_1},\vec{e_2}\}$的平面上的任意点 P，矢量$\overrightarrow{OP}$叫做点 P 的径矢，径矢$\overrightarrow{OP}$关于标架$\{O;\vec{e_1},\vec{e_2}\}$的分量 x,y 叫做点 P 关于标架$\{O;\vec{e_1},\vec{e_2}\}$的坐标，记做 $P(x,y)$或(x,y).

13. 当平面上取定标架$\{O;\vec{e_1},\vec{e_2}\}$之后，平面上全体矢量的集合或者全体点的集合与全体有序数对 x, y 的集合具有一一对应的关系，这种一一对应的关系叫做平面上矢量或点的一个坐标系. 平面坐标系也常用$\{O;\vec{e_1},\vec{e_2}\}$来表示，此时点 O 叫做坐标原点，$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$都叫做坐标矢量.

14. 由右(左)旋标架决定的坐标系叫做右(左)旋坐标系或右(左)手坐标系；仿射标架、笛卡尔标架与直角标架所确定的坐标系分别叫做仿射坐标系、笛卡尔坐标系与直角坐标系.

15. 约定用$\{O;\vec{i},\vec{j}\}$表示直角坐标系, 在讨论平面问题时所采用的坐标系，一般都是平面右手直角坐标系.

16. 过点 O 沿着坐标矢量$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$的方向引二轴 Ox, Oy,可以用这二条具有公共点 O 的不共线的轴 Ox, Oy 来表示平面坐标系，记做 $O-x\ y$，此时点 O 叫做平面坐标系的原点，Ox 叫做 x 轴，Oy 叫做 y 轴. 两坐标轴把平面分成四个区域，每一个区域都叫做象限.

17. 直线上一个定点 O，连同直线上一个非零矢量 $\vec{e}$ 的全体，叫做直线上的一个标架，记做 $\{O;\vec{e}\}$，如果 $\vec{e}$ 为单位矢量，那么 $\{O;\vec{e}\}$ 叫做笛卡尔标架，在一般情况下，$\{O;\vec{e}\}$ 叫做仿射标架.

18. 表达式 $\vec{r}=x\vec{e}$ 中的 x 叫做矢量 $\vec{r}$ 关于标架 $\{O;\vec{e}\}$ 的分量或称为坐标，记做 $\vec{r}\ \{x\}$ 或 $\{x\}$.

19. 对于取定了标架 $\{O;\vec{e}\}$ 的直线上任意点 P，矢量 $\overrightarrow{OP}$ 叫做点 P 的径矢，径矢 $\overrightarrow{OP}$ 关于标架的分量 x 叫做点 P 关于标架 $\{O;\vec{e}\}$ 的坐标，记做 $P(x)$ 或 (x).

20. 当直线上取定标架 $\{O;\vec{e}\}$ 之后，直线上全体矢量的集合或全体点的集合与全体实数 x 的集合具有一一对应的关系，这种一一对应的关系叫做直线上矢量或点的一个坐标系. 直线上的坐标系也常用 $\{O;\vec{e}\}$ 来表示，此时点 O 叫做坐标原点，$\vec{e}$ 叫做坐标矢量.

21. 由仿射标架与笛卡尔标架所确定的坐标系分别叫做仿射坐标系与笛卡尔坐标系.

22. 取定标架 $\{O;\ \vec{e}\}$ 的直线，叫做坐标轴或简称为轴，原点为 O，坐标写成 x 的轴记做 Ox.

二、矢量在轴上的射影

1. 已知空间的一点 A 与一轴 l，通过 A 作垂直于轴 l 的平面 α，平面 α 与轴 l 的交点 A 叫做点 A 在轴 l 上的射影.

2. 设矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点 A 和终点 B 在轴 l 上的射影分别为 A' 和 B'，那么矢量 $\overrightarrow{A'B'}$ 叫做矢量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上的射影矢量，记作射影矢量 $_l\overrightarrow{AB}$. 如图 1.3.

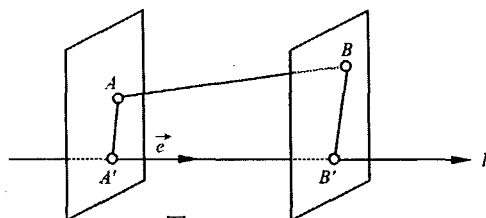


图 1.3

3. 如果在轴上取与轴方向相同的单位矢量 $\vec{e}$，则有射影矢量

$_l\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}=x\vec{e}$，其中 x 叫做矢量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上的射影，记作射影 $_l\overrightarrow{AB}$，即射影 $_l\overrightarrow{AB}=x$.

4. 可以把射影矢量 $_l\overrightarrow{AB}$ 与射影 $_l\overrightarrow{AB}$ 分别写成射影矢量 $_{\vec{e}}\overrightarrow{AB}$ 与射影 $_{\vec{e}}\overrightarrow{AB}$，且分别叫做矢量 $\overrightarrow{AB}$ 在矢量 $\vec{e}$ 上的射影矢量与 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\vec{e}$ 上的射影，两者之间的关系是

$$\text{射影矢量}_{\vec{e}}\overrightarrow{AB}=(\text{射影}_{\vec{e}}\overrightarrow{AB})\vec{e}.$$

5. 设 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是两个非零矢量，自空间任意点 O 作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，把射线 OA 和 OB 构成的在 0 与 π 之间的角，叫做矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，记做 $\angle(\vec{a},\vec{b})$. 按规定，若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 同向，则 $\angle(\vec{a},\vec{b})=0$；若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 反向，则 $\angle(\vec{a},\vec{b})=\pi$；若 $\vec{a}\nparallel\vec{b}$，则 $0<\angle(\vec{a},\vec{b})<\pi$.

6. 在平面上，可以引进从矢量 $\vec{a}$ 到矢量 $\vec{b}$ 的有向角的概念，并记作 $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$，当 $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ 时，以矢量 $\vec{a}$ 扫过矢量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 之间的夹角 $\angle(\vec{a},\vec{b})$ 旋转到与矢量 $\vec{b}$ 同方向的位置时，如果旋转方向是逆时针的，则 $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\angle(\vec{a},\vec{b})$；如果旋转方向是顺时针的，则 $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=-\angle(\vec{a},\vec{b})$. 当 $\vec{a}\parallel\vec{b}$ 时，$\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\angle(\vec{a},\vec{b})$.

有向角的值，常可推广到 $\leqslant-\pi$ 或 $>\pi$，这时我们认为相差 2π 整数倍的值代表同一角，对于有向角还有下面的等式

$$\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=-\measuredangle(\vec{b},\vec{a}),\quad \measuredangle(\vec{a},\vec{b})+\measuredangle(\vec{b},\vec{c})=\measuredangle(\vec{a},\vec{c}).$$

7. 矢量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上的射影等于矢量的模乘以轴与该矢量的夹角的余弦：

$$\text{射影}_l\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta,\quad \theta=\angle(l,\overrightarrow{AB}).$$

8. 相等矢量在同一轴上的射影相等.

9. 对于任何矢量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 有

$$\text{射影}_l(\vec{a}+\vec{b})=\text{射影}_l\vec{a}+\text{射影}_l\vec{b}.$$

10. 对于任何矢量 $\vec{a}$ 与任意实数 λ 有

$$\text{射影}_l(\lambda\vec{a})=\lambda\text{射影}_l\vec{a}.$$

§ 1.3　矢量的乘积运算

一、两矢量的数性积

1. 两个矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的模和它们夹角的余弦的乘积叫做矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$的数性积(也称数积，内积，点积)，记做$\vec{a}\cdot\vec{b}$或$\vec{a}\,\vec{b}$，即

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}).$$

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|$射影$_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|$射影$_{\vec{b}}\vec{a}$.

3. 当$\vec{e}$为单位矢量时　$\vec{a}\cdot\vec{e}=$射影$_{\vec{e}}\vec{a}$.

4. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=\vec{a}^2$.

5. 两矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$相互垂直的充要条件是$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

6. 矢量的数性积满足下面的运算规律

(1) 交换律　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

(2) 关于数因子的结合律　$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$.

(3) 分配律　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

7. 设$\vec{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$，$\vec{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$，则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2.$$

8. 设$\vec{a}=\{X,Y,Z\}$，则 $|\vec{a}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$.

9. 空间两点$P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$间的距离是

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

10. 矢量与坐标轴(或坐标矢量)所成的角叫做矢量的方向角，方向角的余弦叫做矢量的方向余弦.

11. 非零矢量$\vec{a}=\{X,Y,Z\}$的方向余弦是

$$\cos\alpha=\frac{X}{|\vec{a}|}=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{Y}{|\vec{a}|} = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{|\vec{a}|} = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

且

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

其中的α, β, γ分别为矢量$\vec{a}$与 x 轴，y 轴，z 轴的交角，即$\vec{a}$的三个方向角.

13. $\overrightarrow{a^\circ} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

14. 设空间中两个非零矢量为$\vec{a}\{X_1,Y_1,Z_1\}$，$\vec{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$，那么它们夹角的余弦是

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}.$$

15. 矢量$\vec{a}\{X_1,Y_1,Z_1\}$和$\vec{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$相互垂直的充要条件是

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0.$$

16. 设平面上的两矢量为$\vec{a}\{X_1,Y_1\}$，$\vec{b}=\{X_2,Y_2\}$，那么有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=X_1X_2+Y_1Y_2.$$

（1）平面上两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$间的距离为

$$d=|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

（2）矢量$\vec{a}$的方向余弦 $\cos\alpha, \cos\beta$ 可以表示为

$$\cos\alpha=\frac{X_1}{|\vec{a}|}=\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}}, \quad \cos\beta=\frac{Y_1}{|\vec{a}|}=\frac{Y_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}},$$

且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$.

（3）非零矢量$\vec{a}\{X_1,Y_1\}$和$\vec{b}\{X_2,Y_2\}$夹角的余弦为

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2}}.$$

二、两矢量的矢性积

1. 两矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的矢性积（也称矢积，外积，叉积）是一个矢量，记做$\vec{a}\times\vec{b}$或$[\vec{a}\ \vec{b}]$，它的模是

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a},\vec{b}),$$

它的方向与$\vec{a},\vec{b}$都垂直，并且按$\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$这个顺序构成右手标架$\{O;\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\}$.

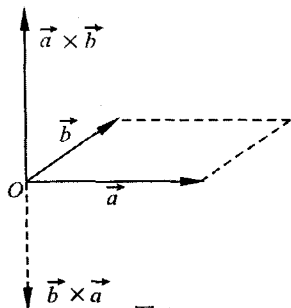


图 1.4

2. 两不共线矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的矢性积的模，等于以$\vec{a}$与$\vec{b}$为邻边所构成的平行四边形的面积,即$S=|\vec{a}\times\vec{b}|$，如图 1.4.

3. 两矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$共线的充要条件是 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

4. 矢量的矢性积满足下面的运算规律：

(1) 反交换律$\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$.

(2) 关于数因子的结合律 $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$.

(3) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

5. 设λ,μ为任意实数，有

$(\lambda\vec{a})\times(\mu\vec{b})=(\lambda\mu)(\vec{a}\times\vec{b})$, $\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}$.

6. 如果$\vec{a}=\{X_1, Y_1, Z_1\}$，$\vec{b}=\{X_2, Y_2, Z_2\}$，那么

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}.$$

三、三矢量的混合积

1. 给定空间的三个矢量$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$，如果先做前两个矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的矢性积，再做所得的矢量与第三个矢量$\vec{c}$的数性积，最后得到的

这个数叫做三矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$的混合积，记做$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$或$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$或$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$.

2. 三个不共面矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$的混合积的绝对值等于以$\vec{a}$，$\vec{b}$,$\vec{c}$为棱的平行六面体的体积V，并且当$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$构成右手系时混合积是正数；当$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$构成左手系时，混合积是负数，也就是有 $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=\varepsilon V$，当$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$是右手系时$\varepsilon=1$；当$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$是左手系时$\varepsilon=-1$.

3. 三矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$共面的充要条件是 $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=0$.

4. 轮换混合积的三个因子，并不改变它的值，对调任何两个因子要改变混合积符号，即

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a})=(\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b})=-(\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c})=-(\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a})=-(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}).$$

5. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

6. 如果 $\vec{a}=\{X_1, Y_1, Z_1\}$，$\vec{b}=\{X_2, Y_2, Z_2\}$，$\vec{c}=\{X_3, Y_3, Z_3\}$，那么

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

7. 如 6 假设，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$三个矢量共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}=0.$$

例 1. 如图 1.5，设M是平行四边形$ABCD$的中心，O是任意一点，证明

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OM}.$$

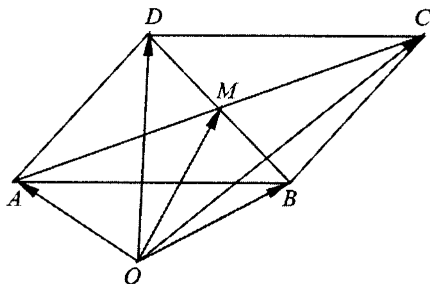


图 1.5

分析： 将$\overrightarrow{OM}$分别看作$\triangle OAC$与$\triangle OBD$的中线.

证明：因为$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$，$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$，

所以
$$2\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

即

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OM}$.

例 2. 设点 O 是平面上正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心，证明:
$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}.$$

分析：如图 1.6，每一矢量$\overrightarrow{OA_i}$都是其相邻两矢量的和矢量的某一倍数，从而求解.

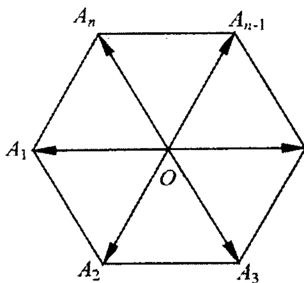


图 1.6

证明：因为

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}=\lambda\overrightarrow{OA_2},$$
$$\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_4}=\lambda\overrightarrow{OA_3},$$
$$\cdots\cdots$$
$$\overrightarrow{OA_{n-1}}+\overrightarrow{OA_1}=\lambda\overrightarrow{OA_n},$$
$$\overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{OA_2}=\lambda\overrightarrow{OA_1},$$

所以
$$2(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})$$
$$=\lambda(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}),$$

所以
$$(\lambda-2)(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})=\vec{0}.$$

显然
$$\lambda\neq 2,\ 即\ \lambda-2\neq 0.$$

所以
$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}.$$

例 3. 在空间直角坐标系$\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$下，求 $P(2,-3,-1)$，$M(a, b, c)$关于 (1) 坐标平面；(2) 坐标轴；(3) 坐标原点的各个对称点的坐标.

解：可按照“关于哪轴对称，哪轴不动，其余变号”的方法去考虑，有

$M(a,b,c)$关于 xOy 平面的对称点坐标为$(a,b,-c)$，

$M(a,b,c)$关于 yOz 平面的对称点坐标为$(-a,b,c)$，

$M(a,b,c)$关于 xOz 平面的对称点坐标为$(a,-b,c)$，

$M(a,b,c)$关于 x 轴平面的对称点坐标为$(a,-b,-c)$，

$M(a,b,c)$关于 y 轴的对称点的坐标为$(-a,b,-c)$，

$M(a,b,c)$关于 z 轴的对称点的坐标为$(-a,-b,c)$.

类似考虑 $P(2,-3,-1)$即可.

例 4. 已知矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$的分量如下：

(1) $\vec{a}=\{0,-1,2\}$，$\vec{b}=\{0,2,-4\}$，$\vec{c}=\{1,2,-1\}$；

(2) $\vec{a}=\{1,2,3\}$，$\vec{b}=\{2,-1,0\}$，$\vec{c}=\{0,5,6\}$.

试判别它们是否共面？能否将$\vec{c}$表成$\vec{a}$，$\vec{b}$的线性组合？若能表示，写出表示式.

解:(1) 因为 $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$,所以 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$三矢量共面，

由于$\vec{a}$，$\vec{b}$的对应坐标成比例，即$\vec{a}/\!/\vec{b}$，但$\vec{c}\not\parallel\vec{a}$，故不能将$\vec{c}$表成$\vec{a}$，$\vec{b}$的线性组合.

例 5. 证明$(\vec{a}\times\vec{b})^2\leqslant\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$，并说明在什么情形下等号成立.

证明：$(\vec{a}\times\vec{b})^2=|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\angle(\vec{a},\vec{b})$

$$\leqslant|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2.$$

要使等号成立，必须 $\sin^2\angle(\vec{a},\vec{b})=1$，从而 $\sin\angle(\vec{a},\vec{b})=1$，故 $\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{2}$，即当$\vec{a}\perp\vec{b}$时，等号成立.

例 6. 证明如果$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，那么$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$，并说明它的几何意义.

证明：由$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，有 $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c}=\vec{0}\times\vec{c}=\vec{0}$，但$\vec{c}\times\vec{c}=\vec{0}$，于是

$$\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}=\vec{0},$$

所以

$$\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}.$$

同理，由 $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=\vec{0}$，有 $\vec{c}\times\vec{a}=\vec{a}\times\vec{b}$，从而

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}.$$

其几何意义是：以三角形的任二边为邻边构成的平行四边形的面积相等.

例 7. 设 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 为三个非零矢量，证明

(1) $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}+\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})=(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$;

(2) $(\vec{a}+\vec{b},\ \vec{b}+\vec{c},\ \vec{c}+\vec{a})=2(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$.

证明： (1) 左端$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}+\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})$

$$\begin{aligned}&=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\lambda\vec{a})+(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\mu\vec{b})\\&=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+\lambda(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}+\mu(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}\\&=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})+\lambda(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{a})+\mu(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{b})\\&=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})=\text{右端}.\end{aligned}$$

(2) 左端$=[(\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{c}+\vec{a})]\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$$\begin{aligned}&=[\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}]\cdot(\vec{a}+\vec{b})\\&=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}+(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{a}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{b}+(\vec{b}\times\vec{a})\\&\quad\cdot\vec{b}+(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}=(\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a})+(\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b})=2(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})=\text{右端}.\end{aligned}$$

例 8. 设 $\vec{u}=a_1\vec{e_1}+b_1\vec{e_2}+c_1\vec{e_3}$，$\vec{v}=a_2\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}+c_2\vec{e_3}$，$\vec{w}=a_3\vec{e_1}+b_3\vec{e_2}+c_3\vec{e_3}$，试证明

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}).$$

证明： 因为

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}(\vec{e_1}\times\vec{e_2})+\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_2&c_2\end{vmatrix}(\vec{e_2}\times\vec{e_3})+\begin{vmatrix}c_1&a_1\\c_2&a_2\end{vmatrix}(\vec{e_3}\times\vec{e_1})$$

所以

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}c_3(\vec{e_1}\times\vec{e_2})\cdot\vec{e_3}+\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\b_2 & c_2\end{vmatrix}a_3(\vec{e_2}\times\vec{e_3})\cdot\vec{e_1}+\begin{vmatrix}c_1 & a_1\\c_2 & a_2\end{vmatrix}b_3(\vec{e_3}\times\vec{e_1})\cdot$$

$$\vec{e_2}=\left(\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}c_3+\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\b_2 & c_2\end{vmatrix}a_3+\begin{vmatrix}c_1 & a_1\\c_2 & a_2\end{vmatrix}b_3\right)(\vec{e_1}\times\vec{e_2})\cdot\vec{e_3}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}).$$

习题一

1. 设 G 是$\triangle ABC$ 的重心，O 是空间任意一点，试证

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

2. 设$\overrightarrow{OP_i}=\vec{r_i}$ $(i=1, 2, 3, 4)$，试证 P_1, P_2, P_3, P_4 四点共面的充要条件是存在不全为零的实数 $\lambda_i (i=1, 2, 3, 4)$使

$$\lambda_1\vec{r_1}+\lambda_2\vec{r_2}+\lambda_3\vec{r_3}+\lambda_4\vec{r_4}=\vec{0}\text{，且}\sum_{i=1}^{4}\lambda_i=0.$$

3. 指出坐标满足下列条件的点(x, y, z)在空间的位置.

(1) $x=y$;　　(2) $yz<0$;　　(3) $xyz<0$.

4. 已知线段 AB 被点 $C(2, 0, 2)$和 $D(5,-2, 0)$三等分，试求这个线段两端点 A 与 B 的坐标.

5. 如果非零矢量$\vec{r_i}$ $(i=1,2,3)$满足$\vec{r_1}=\vec{r_2}\times\vec{r_3}$，$\vec{r_2}=\vec{r_3}\times\vec{r_1}$，$\vec{r_3}=\vec{r_1}\times\vec{r_2}$，那么$\vec{r_1},\vec{r_2},\vec{r_3}$是彼此垂直的单位矢量，并且按这次序构成右手系.

6. 已知 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}-2\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{a}-3\vec{b}$，其中$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=3$，

$\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{6}$，求平行四边形 $ABCD$ 的面积.

7. 求下列混合积的值

(1) $(\vec{i},\vec{j},\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$;　　(2) $(\vec{j}+\vec{k},\vec{k}+\vec{i},\vec{i}+\vec{j})$;

(3) $(\vec{a},\vec{b},\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$;　　(4) $(\vec{a},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\vec{a}+\vec{b})$.

8. 设 $\vec{a}=3\vec{e_1}+4\vec{e_2}$，$\vec{b}=\vec{e_1}-2\vec{e_3}$，$\vec{c}=2\vec{e_2}+3\vec{e_3}$，证明:三矢量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面.

9. 在 $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ 下，三矢量 $\vec{a}=\vec{j}+\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{k}+\vec{i}$，$\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}$ 的位置关系如何？

10. 已知三非零矢量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，则 $|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|\leqslant|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$. 在什么条件下等号成立？并写出坐标表示式.

11. 设径矢 $\overrightarrow{OA}=\vec{r_1}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{r_2}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{r_3}$，证明 $\vec{R}=(\vec{r_1}\times\vec{r_2})+(\vec{r_2}\times\vec{r_3})+(\vec{r_3}\times\vec{r_1})$ 垂直于 ABC 平面.

12. 用矢量代数的方法证明：

（1）三角形的三中线共点且这点到顶点的距离是到对边中点距离的二倍.

（2）三角形的三高共点.

（3）四面体的顶点与对边中点的连线相交于一点且这点到顶点的距离是到对边距离的三倍.

（4）三角形的正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

（5）三角形面积的海伦(Heron)公式，即三斜求积公式：

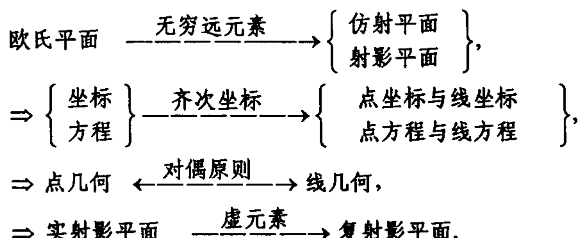
$$\Delta^2=p(p-a)(p-b)(p-c).$$

式中 $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$ 是三角形的半周长，Δ 为三角形的面积.

第二章　欧氏几何的推广

本章首先在欧氏平面上引入无穷远元素建立射影平面概念，其次在射影平面上引进齐次坐标概念，然后介绍射影几何的对偶原则，最后将实射影平面推广为复射影平面.

本章的知识结构为



§2.1　无穷远元素

一、中心射影

中心射影分直线到直线与平面到平面两种，下面分别来讨论.

1. 直线到直线：如图 2.1，设 l,l'是同一平面内的两条不同直线，O 是平面内不在 l,l'上的一点，O 与 l 上的点 A，B，…相连，并延长交 l'于 A'，B'，….那么，所得 l 上的点与 l'上的点之间的对应关系称为直线 l 到直线 l'的中心射影. A，B，…叫做**原象点**，A'，B'，…叫做**影象点**. O 点叫做**射影中心**，OA，OB，…叫做**射影线**.

2. 平面到平面：如图 2.2，设 π,π'是任意两平面，g 为其交线，O 为不属于这两平面的一点. O 与 π 上的点 M 相连，并延长交 π'于

M'.那么，所得π上的点与π'上的点之间的对应关系称为平面π到平面π'的**中心射影**.

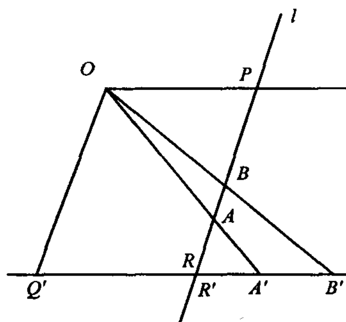


图 2.1

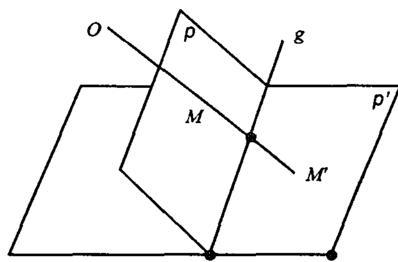


图 2.2

3. 没影点与没影线：在直线l到直线l'的中心射影中，当l上的一点P使射影线$OP /\!/ l'$时，P在l'上的对应点不存在；当l'上的一点Q'使$OQ' /\!/ l$时，Q'在l上的对应点不存在.把P和Q'叫做**没影点**.同样，在平面π到平面π'的中心射影中，也可以得到**没影线**的概念.

由没影点与没影线的存在可知，直线到直线或平面到平面的中心射影都不是一一对应，为了建立完备的中心射影，有必要引入无穷远元素.

二、无穷远元素

直线到直线或平面到平面的中心射影都不是一一对应，这个缺陷产生的原因，就是两平行直线或平面不相交.要消除这个缺陷就要在欧氏平面上引入新的元素：

1. 无穷远点：我们规定平面上同一方向的所有直线都相交于一个理想点，称为**无穷远点**，记作：P_∞.

2. 无穷远直线：我们规定空间同一方向上的所有平面都相交于一条理想直线，称为**无穷远直线**，记作：l_∞.

一条直线上只有一个 P_∞，一个平面上只有一条 l_∞，且平面上各方向的所有 P_∞构成该平面上的唯一 l_∞ .

把无穷远点和无穷远直线统称为**无穷远元素**（或理想元素）.

三、射影平面

1. 欧氏平面：不存在无穷远元素，平行线存在而不相交.

2. 仿射平面：如果把引入的无穷远元素作为特殊的元素看待，这种观点称为仿射观点，相应的平面称为仿射平面；在仿射平面上平行线存在，相交于无穷远处.

3. 射影平面：如果把引入的无穷远元素与普通元素不加区别地看待，这种观点称为射影观点，相应的平面称为射影平面；在射影平面上没有无穷远元素，平行线不存在.

§2.2　齐次坐标

点和直线的概念已经推广，点和直线的代数表示也要跟着推广才能适应需要.

一、点的坐标与直线的方程

1. 点的坐标：

直线上一点 M 的坐标为 x，若

$$x=x_1 : x_2,\ x_2\neq 0.$$

则（x_1，x_2）称为 M 的齐次坐标，x 称为 M 的非齐次坐标.

（1）对于任意 $k(\neq 0)$，k（x_1，x_2）=（kx_1，kx_2）与（x_1，x_2）表示直线上同一点；

（2）当 $x_2=0$，$x_1\neq 0$ 时，用（x_1，0）$=x_1$（1，0）表示直线上的无穷远点；

（3）（0，0）不表示任何点.

同样，平面上一点 M 的非齐次笛氏坐标为（x，y），若

$$x=x_1:x_3,\ y=x_2:x_3,\ x_3\neq 0.$$

则（x_1，x_2，x_3）称为 M 的齐次笛氏坐标.

（4）对于任意 $k(\neq 0)$，k（x_1，x_2，x_3）=（kx_1，kx_2，$k\,x_3$）与（x_1，x_2，x_3）表示平面上同一点；

（5）当 $x_3=0$，x_1，x_2 不全为 0 时，用（x_1，x_2，0）表示以 $x_1:x_2$ 为方向的直线上的无穷远点；

（6）（1，0，0）表示 x 轴上的无穷远点，（0，1，0）表示 y 轴上的无穷远点，（0，0，1）表示坐标原点，（0，0，0）不表示任何点.

2. 直线的方程：

在平面上方程 $ax+by+c=0$ 表示的是一条直线，叫做直线的非齐次方程. 用齐次坐标可表示为 $ax_1+b\,x_2+c\,x_3=0$，叫做直线的齐次方程.

无穷远直线的特征是 $x_3=0$，所以取 $x_3=0$ 为无穷远直线的齐次方程.无穷远直线没有非齐次方程.

例 2.1　求斜率为 k 的直线 $y=kx+b$ 上的无穷远点.

解：直线 $y=kx+b$ 的齐次方程为 $kx_1-x_2+b\,x_3=0$，与无穷远直线 $x_3=0$ 的联立方程组为

$$\begin{cases} kx_1-x_2+bx_3=0, \\ \quad x_3=0. \end{cases}$$

解得交点为 $x_1:x_2:x_3=1:k:0$，所以，**斜率为 k 的直线上的无穷远点是**（1，k，0）.

例 2.2　设 $\vec{a}\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$，$\vec{b}\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$，$\vec{x}\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$.试证两直线

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0\ （即\ \vec{a}\cdot\vec{x}=0），$$

与

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0\ （即\ \vec{b}\cdot\vec{x}=0）$$

的交点为 $\vec{x}=\vec{a}\times\vec{b}$.

证明：两直线的联立方程组为

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0. \end{cases}$$

解得交点坐标为

$$x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

而两矢量的叉乘为

$$\vec{a} \times \vec{b} = \{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \},$$

所以两直线交点为

$$\vec{x} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

二、直线的坐标与点的方程

1. 直线的坐标：

直线 $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$（即 $\vec{u} \cdot \vec{x} = 0$）由其系数完全确定，把不全为 0 的三个数（$u_1$，$u_2$，$u_3$）称为直线 $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ 的齐次坐标.

（1）对于任意 $k(\neq 0)$，k（u_1，u_2，u_3）=（$k u_1$，$k u_2$，$k u_3$）与（u_1，u_2，u_3）表示平面上同一条直线；

（2）当 $u_3 \neq 0$（即直线不通过原点）时，称

$$u = \frac{u_1}{u_3}, v = \frac{u_2}{u_3}$$

为直线 $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ 的非齐次坐标，当 $u_3 = 0$，即过原点的直线没有非齐次坐标；

（3）y 轴的齐次坐标是（1，0，0），y 轴无非齐次坐标（因为过原点），x 轴的齐次坐标是（0，1，0），x 轴也没有非齐次坐标，无穷远直线的齐次坐标是（0，0，1），无穷远直线的齐次坐标是（0，0）.

（4）与例 2 一样，两点$\vec{a}\{a_1, a_2, a_3\}$,$\vec{b}\{b_1, b_2, b_3\}$**的连线的坐标为**$\vec{u}=\vec{a}\times\vec{b}$(请读者自证).

2. 点的方程：

过定点$\vec{x}\{x_1, x_2, x_3\}$的所有直线都满足方程$x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3=0$，

其中x_1，x_2，x_3为定量，u_1，u_2，u_3为变量.

把方程

$$x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3=0$$

叫做点（x_1，x_2，x_3）的齐次方程.

把方程

$$x_1u+x_2v+x_3=0$$

叫做点（x_1，x_2，x_3）的非齐次方程（坐标原点无非齐次方程）.

例 2.3 在射影平面上，求下列各直线的齐次与非齐次坐标.

（1）$x+y-1=0$,　　（2）$x-y=0$,　　（3）$y=0$.

解：（1）直线$x+y-1=0$的齐次方程为$x_1+x_2-x_3=0$，则其齐次坐标为（1，1，-1），非齐次坐标为（-1，-1）.

（2）直线$x-y=0$的齐次方程为$x_1-x_2=0$，则其齐次坐标为（1，1，0），没有非齐次坐标（因为直线过原点）.

（3）直线$y=0$的齐次方程为$x_2=0$，则其齐次坐标为（0，1，0），没有非齐次坐标（因为直线过原点）.

例 2.4 在射影平面上，求下列各点的齐次与非齐次方程.

（1）（1，-2），　　(2)（0，1），　　(3)（0，0）.

解：（1）点（1，-2）的齐次坐标为（1，-2，1），则其齐次方程为$u_1-2u_2+u_3=0$，非齐次方程为$u-2v+1=0$.

（2）点（0，1）的齐次坐标为（0，1，1），则其齐次方程为$u_2+u_3=0$，非齐次方程为$v+1=0$.

（3）坐标原点（0，0）的齐次坐标为（0，0，1），则其齐次方程为$u_3=0$，没有非齐次方程.

§2.3 点几何与线几何

一、对偶原理

1. 对偶元素：射影平面上的点和直线称为一对对偶元素.点在直线上或直线过点，都称为点与直线接合.

2. 对偶命题：在只涉及点与直线的射影命题中，把“点”换为“直线”,“直线”换为“点”，而得到另一个命题.这样的两个命题称为一对对偶命题.

3. 对偶图形：在由点和直线构成的图形中，按照对偶命题的方法得到另一个图形，把这两个图形称为一对对偶图形.

4. 对偶原则：平面上的射影命题都是成对出现的，若其中一个命题成立，则另一个命题也一定成立，这个结论称为对偶原则.

二、点几何

以点为基本元素的几何称为点几何.点几何里点有坐标，直线有方程，直线看成是点的轨迹.点几何的命题如下：

1. 两点决定一直线.有两个顶点，一条边，构形代号为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. 三点形(平面内不共线的三点及其两两的连线构成的图形).有三个顶点，三条边，构形代号为

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. 四点形（平面内无三点共线的四点依次相连构成的图形）.有四个顶点，四条边，构形代号为

$$\begin{pmatrix}4 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}.$$

4. 完全四点形（平面内无三点共线的四点及其两两的连线构成的图形，如图 2.3）.有四个顶点，六条边(三双对边)，构形代号为

$$\begin{pmatrix}4 & 3\\2 & 6\end{pmatrix}.$$

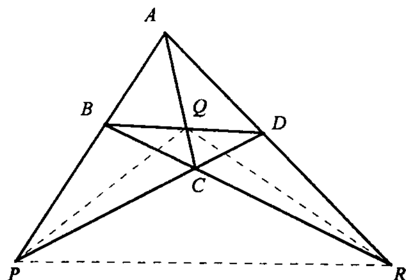


图 2.3　完全四点形 $ABCD$，对角三角形 PQR

其三双对边的交点(对角点)分别为 P，Q，R，对角点产生的三点形叫做完全四点形的对角三角形.

三、线几何

以直线为基本元素的几何称为线几何.**线几何直线里有坐标，点有方程，点看成是直线的轨迹**.线几何的命题如下：

1.′ 两直线决定一点.有一个顶点，两条边，构形代号为

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}.$$

2.′ 三线形（平面内不共点的三直线及其两两的交点构成的图形）.有三个顶点，三条边，构形代号为

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\2 & 3\end{pmatrix}.$$

3.′ 四线形（平面内无三线共点的四直线依次相交构成的图形）. 有四个顶点，四条边，构形代号为

$$\begin{pmatrix}4 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}.$$

4.′ 完全四线形（平面内无三线共点的四直线及其两两的交点构成的图形，如图 2.4）.有六个顶点(三双对顶点)，四条边，构形代号为

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

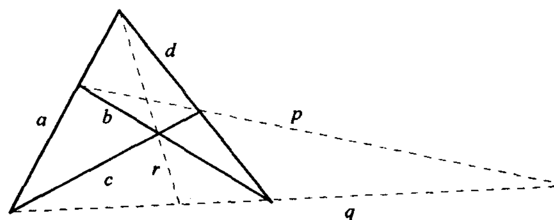


图 2.4　完全四线形 *abcd*，对角三角形 *pqr*

其三双对顶点的连线(对顶线)分别为 p,q,r，对顶线产生的三线形叫做完全四线形的对角三角形.

四、笛沙格定理

1. 笛沙格(Desargues)定理:

定理 2.1　如图 2.5，在$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$ 中，如果对应顶点的连线 AA'，BB'，CC' 共点，则对应边的交点 $P=BC\times B'C'$，$Q=CA\times C'A'$，$R=AB\times A'B'$ 共线. 构形代号为

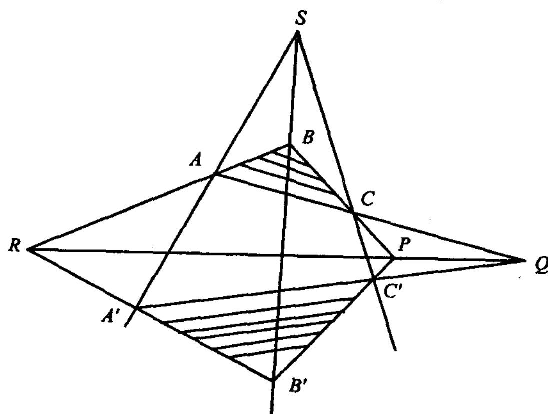


图 2.5　笛沙格图形

$$\begin{pmatrix}10 & 3\\ 3 & 10\end{pmatrix}.$$

证明：以 A，B，C 和 A'，B'，C' 及 P，Q，R 等既表示点，又表示点的坐标矢量. 设 AA'，BB'，CC' 共点于 S. ∵A，A'，S 共线（即矢量 A, A', S 线性相关），∴S 可以表示为 A 和 A' 的线性组合：

$$S=\alpha A+\alpha' A',$$

同理：

$$S=\beta B+\beta' B',$$

$$S=\gamma C+\gamma' C'.$$

三式相减得

$$\alpha A-\beta B=-(\alpha' A'-\beta' B')=R,$$

$$\beta B-\gamma C=-(\beta' B'-\gamma' C')=P,$$

$$\gamma C-\alpha A=-(\gamma' C'-\alpha' A')=Q.$$

则

$$P+Q+R=0$$

即三矢量 P，Q，R 线性相关，所以三点 P，Q，R 共线.

2. 笛沙格逆（对偶）定理：

定理 2.1′ 在两个三角形中，如果三双对应边的交点共线，则三双对应顶点的连线共点.(根据对偶原则一定成立)

例 2.5 在平面上给定二直线 a 和 b 及外一点 P，不先定出 a 与 b 交点的前提下，作一条直线过 P 和这个交点.

作法：（如图 2.6）

（1）在二直线 a，b 外任取一点 O；

（2）过 O 点任作三直线 l，m，n，且 $l\times a=Q$，$l\times b=R$，$n\times a=Q'$，$n\times b=R'$；

（3）连接 P，Q 交 m 于 O_1，连接 P、R 交 m 于 O_2，连接 O_1、Q' 和 O_2、R' 并交于 P'.

P，P' 的连线就是所求直线.

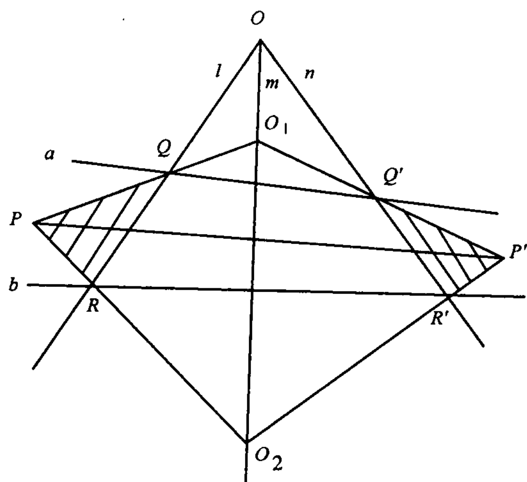


图 2.6

证明：在△PQR 和△$P'Q'R'$ 中，∵对应边的交点 O，O_1，O_2 共线，∴对应顶点的连线 PP'，QQ'，RR' 共点（笛沙格逆定理），即 PP' 过 a 和 b 的交点.

例 2.6 设命题为 A：如果两个完全四点形的五对对应边的交点在同一直线上，则其第六对对应边的交点也在此直线上，且其四对对应顶点的连线交于同一点（如图 2.7）.

试写出命题 A 的对偶命题 P_A，并用笛沙格定理证明这两个命题.

解：对偶命题 P_A：如果两个完全四线形的五对对应顶点的连线通过同一点，则其第六对对应顶点的连线也通过此点，且其四对对应边的交点在同一

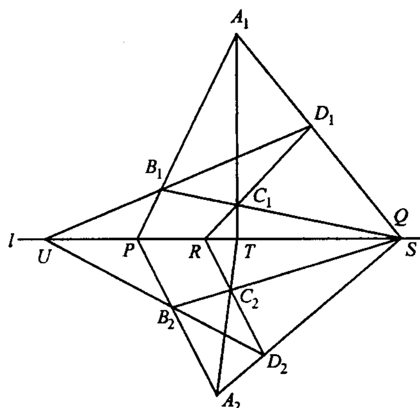


图 2.7

直线上（如图 2.8）.

下面用笛沙格定理证明命题 A，从而也证明了对偶命题 P_A.

设两个完全四点形 $A_1B_1C_1D_1$ 和 $A_2B_2C_2D_2$ 的五对对应边的交点 $A_1B_1\times A_2B_2=P$，$B_1C_1\times B_2C_2=Q$，$C_1D_1\times C_2D_2=R$，$D_1A_1\times D_2A_2=S$，$A_1C_1\times A_2C_2=T$ 在同一直线 l 上，欲证连线 A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2、D_1D_2 共点，且第六对对应边的交点 $Q=B_1C_1\times B_2C_2$ 也在直线 l 上.

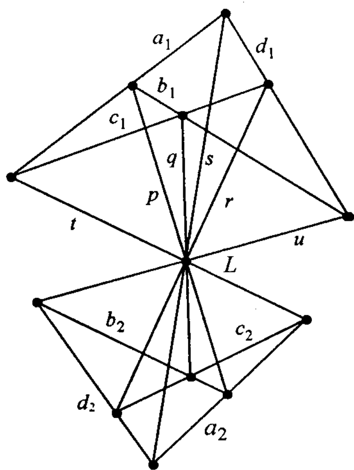


图 2.8

在$\triangle A_1B_1C_1$和$\triangle A_2B_2C_2$中，∵对应边的交点 P，Q，T 共线，∴对应顶点的连线 A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2 共点（笛沙格逆定理）；

在$\triangle A_1C_1D_1$和$\triangle A_2C_2D_2$中，∵对应边的交点 R，S，T 共线，∴对应顶点的连线 A_1A_2、C_1C_2、D_1D_2 共点（笛沙格逆定理）；

因此，连线 A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2、D_1D_2 共点.

又在$\triangle A_1B_1D_1$和$\triangle A_2B_2D_2$中，∵对应顶点的连线 A_1A_2、B_1B_2、D_1D_2 共点，∴对应边的交点 P，S，U 共线（笛沙格定理），即 U 在 P、S 的连线 l 上.

§ 2.4　复射影平面

在推广的欧氏平面（射影平面）上，讨论直线与二次曲线的关系时，涉及到解二次方程的问题，在代数中引入虚数的方法来解决二次方程的根.相应地，在几何中引入虚点的方法来解决，从而使实射影平面推广为复射影平面.

一、非齐次坐标表示的复元素

1. 当平面上建立了笛卡尔坐标系之后，一对有序实数(x, y)就表示平面上的一个点，如果x, y中至少有一个是虚数，我们把它叫做平面上的虚点，而x, y叫做这一虚点的坐标，相应地把坐标是一对实数的点叫做平面上的实点. 如果两个虚点的对应坐标是共轭复数，那么这两点叫做一对共轭虚点，实点与虚点统称为复点.

2. 设$M_1(x_1, y_1)$与$M_2(x_2, y_2)$为平面上的两复点，那么我们称$\{x_2-x_1, y_2-y_1\}$为以M_1为起点，M_2为终点的复矢量，记做$\overrightarrow{M_1M_2}$，如果x_2-x_1与y_2-y_1中至少有一个虚数时，我们把它叫做虚矢量. 如果点$M(x, y)$的坐标满足表达式

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

其中λ为复数，我们就说M分M_1M_2成定比λ，特殊地把点$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$叫做$M_1M_2$的中点.

3. 方程$\begin{cases}x=x_1+(x_2-x_1)t,\\ y=y_1+(y_2-y_1)t,\end{cases}$叫做由两点$M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$决定的直线的参数方程，式中t为参数，它可为任意的复数. 消去参数t得$Ax+By+C=0$,称为直线的一般式非齐次方程，如果A, B, C与三个实数成比例，则直线称为实直线，否则称为虚直线，实直线与虚直线统称为复直线.

4. 复点与复直线统称为复元素，引入了复元素的射影平面称为复射影平面.

二、齐次坐标表示的复元素

1. 平面上一点M的笛氏非齐次坐标（x, y），若

$$x=x_1:x_3,\ y=x_2:x_3,\ x_3\neq 0.$$

则（x_1，x_2，x_3）称为 M 的笛氏齐次坐标.

如果（x_1，x_2，x_3）与三个不全为 0 的实数成比例，则称 M 为实点. 否则，称 M 为虚点. 如（2，0，4），（$2i$，0，$4i$），（$2-2i$，0，$4-4i$）都是实点. 而（$2-2i$，0，1）是虚点.

2. 不全为 0 的三个数（u_1, u_2, u_3）称为直线 $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ 的齐次坐标. 若（u_1，u_2，u_3）与三个实数成比例，则直线称为实直线，否则称为虚直线. 当 $u_3\neq0$（即直线不通过原点）时，称(u, v):

$$u=\frac{u_1}{u_3}, v=\frac{u_2}{u_3}$$

为直线 $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ 的非齐次坐标，若(u, v)中至少有一个是虚数，则直线称为虚直线，否则称为实直线.

3. 复点（x_1，x_2，x_3）与复直线（u_1，u_2，u_3）接合的关系式为

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0.$$

三、共轭复元素

我们知道，两个复数 $e=a+bi$ 与 $\bar{e}=a-bi$ 叫做共轭复数，特别地，如果 $b\neq0$，则称为共轭虚数.

1. 概念：

如果两个复元素（点或直线）的坐标互为共轭复（虚）数，则称为共轭复（虚）元素.

非齐次坐标表示的一对共轭复元素，其坐标一定对应为共轭复数；但齐次坐标表示的一对共轭复元素，其坐标不一定对应为共轭复数，因为齐次坐标允许差一个非 0 因子. 如（$2,i$，$1-i$）与（$2+2i$，$1-i$，$2i$）=（$1+i$）（$2,i$，$1-i$）是一对共轭虚元素.

2. 性质：

定理 2.2 一个元素为实元素的充要条件是该元素与其共轭复元素重合.

证明：必要性）实元素的坐标为实数，而实数的共轭复数是这

个数本身，因此实元素与其共轭复元素有相同的坐标，即重合.

充分性）分两种情况证明

（1）如果一对共轭复元素不是无穷远点或过原点的直线，其一定有非齐次坐标

$$(a_1, a_2) 与 (\overline{a}_1, \overline{a}_2)$$

则其齐次坐标可以写作

$$(a_1, a_2, 1) 与 (\overline{a}_1, \overline{a}_2, 1),$$

由于两元素重合，则

$$\frac{a_1}{\overline{a}_1} = \frac{a_2}{\overline{a}_2} = \frac{1}{1},$$

因此

$$a_1 = \overline{a}_1, a_2 = \overline{a}_2,$$

即非齐次坐标都为实数，元素为实元素.

（2）如果一对共轭复元素是无穷远点或过原点的直线，则其齐次坐标（没有非齐次坐标）可以写作

$$(a_1, a_2, 0) 与 (\overline{a}_1, \overline{a}_2, 0),$$

由于两元素重合，则

$$\frac{a_1}{\overline{a}_1} = \frac{a_2}{\overline{a}_2},$$

因此

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\overline{a}_1}{\overline{a}_2},$$

即齐次坐标的比为实数，元素为实元素.

定理 2.3 如果点 x 在直线 u 上，则 x 的共轭复点 $\overline{x}$ 在 u 的共轭复直线 $\overline{u}$ 上.

定理 2.3 为自对偶命题.

证明：因为点 x（x_1，x_2，x_3）与直线 u（u_1，u_2，u_3）接合，则

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0,$$

两端取共轭复数，得

$$\overline{u}_1\overline{x}_1+\overline{u}_2\overline{x}_2+\overline{u}_3\overline{x}_3=0,$$

即点 $\overline{x}$ 在直线 $\overline{u}$ 上.

根据定理 2.3 可得，一虚点在一实直线上，则其共轭虚点也在该实直线上.即一实直线上的点或为实点或为成对的共轭虚点.

定理 2.4 一对共轭复点的连线是实直线.

定理 2.4′ 一对共轭复直线的交点是实点.

证明：我们只证明第二个命题，由对偶原则另一个命题也成立.

设 u 与 $\overline{u}$ 为一对共轭复直线，且

$$u\times\overline{u}=P.$$

由定理 2.3，P 的共轭复点 $\overline{P}$ 也在 u 与 $\overline{u}$ 上，即 P 与 $\overline{P}$ 重合.则根据定理 2.2 可得 P 为实点.

推论 过一个虚点有唯一一条实直线；在一条虚直线上有唯一一个实点.

证明：一条虚直线上的实点就是此直线与其共轭虚直线的交点，如果此直线上再有另一个实点，则此直线成为实直线，与题设矛盾.

同理可证另一个命题.

例 2.7 求直线（$1-i$）x_1+（$2+i$）$x_2+3i\,x_3=0$ 上的实点.

解：所求实点为直线（$1-i$）x_1+（$2+i$）$x_2+3i\,x_3=0$ 与其共轭直线（$1+i$）x_1+（$2-i$）$x_2-3i\,x_3=0$ 的交点，即

$$\left(\begin{vmatrix}2+i & 3i\\ 2-i & -3i\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}3i & 1+i\\ -3i & 1-i\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1-i & 2+i\\ 1+i & 2-i\end{vmatrix}\right)=(2,\ -1,\ 2).$$

例 2.8 求证三点 P（$1,-i$，0）、Q（$1,i$，0）、R（$1,-1$，0）共

线，并将 R 的坐标表示成 P、Q 的坐标的线性组合.

证明：两点 P（1,-i，0）、Q（1,i，0）的连线方程是

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \end{vmatrix}=0，即 x_3=0.$$

而 R（1,-1，0）的坐标满足此连线方程，所以三点 P（1,-i，0）、Q（1,i，0）、R（1,-1，0）共线.

设（1,-1，0）≡（1,-i，0）+k（1,i，0）,则

$$1:-1:0=(1+k):(-i+ki):0,$$

即

$$k=i，R\equiv P+iQ.$$

习题二

1. 求证：在平面 π 到平面 π' 的中心射影中，在平面 π 上相交于没影线的两条直线的影象为平面 π' 上的两平行直线.

2. 求下列直线的齐次与非齐次坐标：

（1）$2x+3y+1=0$,

（2）$2x+3y-3=0$,

（3）$3x-y=0$.

3. 求射影平面上下列各点的齐次与非齐次方程：

（1）（0，0），

（2）（1，1，-1），

（3）直线 $2x+3y-3=0$ 上的无穷远点.

4. 求连接点(1,2,-1)与二直线(2,1,3),(1,-1，0)之交点的直线的方程.

5. 求直线(1,-1,2)与两点(3,4,-1),(5,-3，1)之连线的交点坐标.

6. 直线 AB 与 CD 交于 U，直线 AC 与 BD 交于 V，直线 UV

分别交 AD、BC 于 F、G，直线 BF 与 AC 交于 L(如图 2.9). 求证：三直线 LG,CF,AU 交于一点.

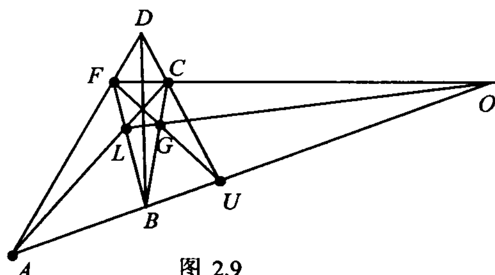


图 2.9

7. 设 a，b，c，d 为平面内的四条直线(如图 2.10)，不许先作 a,b 的交点与 c,d 的交点，求作一直线通过这两个交点.

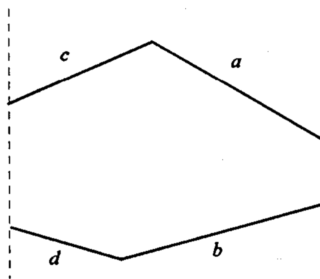


图 2.10

8. 设△ABC 的顶点 A，B，C 分别在共点的三直线 α，β，γ 上移动，且直线 AB 和 BC 分别通过定点 P 和 Q，求证 CA 也通过 PQ 上的一个定点.

9. 求直线（$2,i$，$3-4i$）上的实点.

10. 求通过点（$1,i$，0）的实直线.

11. 无穷远直线 $x_3=0$ 与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=\mathrm{R}^2$ 的交点 I，J 称为射影平面上的（虚）圆点，求 I，J 的坐标.

第三章　仿射几何学

在上一章欧氏平面推广为射影平面、实平面推广到复平面的基础上，本章介绍仿射几何的理论，作为欧氏几何过渡到射影几何的桥梁.

本章的知识结构为

$$\text{仿射对应} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{平行射影} \\ \text{一般仿射} \\ \text{平面内的仿射} \end{array} \right\},$$

$$\Rightarrow \text{仿射几何的对象} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{仿射不变性} \\ \text{仿射不变量} \\ \text{仿射不变图形} \end{array} \right\},$$

$\Rightarrow$ 仿射的代数表达式.

§3.1　仿射对应

一、平行射影

平行射影与中心射影一样分为直线到直线和平面到平面两种，下面分别来讨论.

1. 直线到直线：如图 3.1，已知同一平面内的两直线 a 和 a'. 设 $\bar{v}$ 为平面上与 a 和 a' 都不平行的方向矢量. 过直线 a 上的点 A，B，C，D，…作 $\bar{v}$ 的平行线，交 a' 于 A'，B'，C'，D'，…. 则所得 a 上的点与 a' 上的点之间的一一对应关系称为直线到直线的平行射影或透视仿射，记作 T. a 上的点 A，B，C，D，…称为 T

的原象点，a' 上的点 A'，B'，C'，D'，…称为 T 的映象点，且有 $A'=T(A)$，$B'=T(B)$，$C'=T(C)$，$D'=T(D)$，….

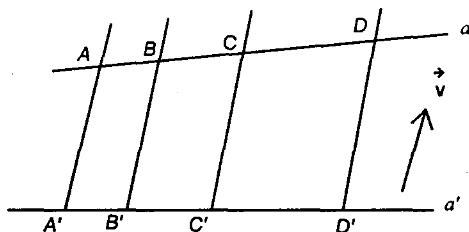


图 3.1

2. 平面到平面：如图 3.2，已知平面 π 与 π'，设 $\vec{v}$ 为与平面 π 与 π' 都不平行的方向矢量. 过平面 π 上的点 A，B，C，…作 $\vec{v}$ 的平行线，交平面 π' 于 A'，B'，C'，…. 则所得 π 上的点与 π' 上的点之间的一一对应关系，称为平面到平面的平行射影或透视仿射，记作 T. 即 $A'=T(A)$，$B'=T(B)$，$C'=T(C)$，…. 若 A，B，C 共线于 a，则易见 A'，B'，C' 共线于 a'，即 $a'=T(a)$.

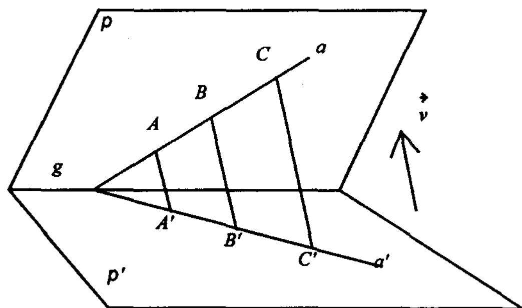


图 3.2

由此可见，平行射影 T(直线到直线或平面到平面)使点对应点，直线对应直线，且共线点对应共线点.即平行射影保持同素性和接合性.

平行射影的基本特征是原象点与映象点的连线互相平行．因

此，平行射影是特殊的中心射影（以 P_∞ 为中心）.

二、仿射对应

设同一平面内的 n 条直线 a_1，a_2，…，a_n（如图 3.3），用 T_1，T_2，…，T_{n-1} 依次表示 a_1 到 a_2，a_2 到 a_3，…，a_{n-1} 到 a_n 的平行射影，则 a_1 上的点与 a_n 上的点之间建立了一一对应关系，称为直线到直线的仿射对应，记作

$$T=T_{n-1}\cdots T_2T_1.$$

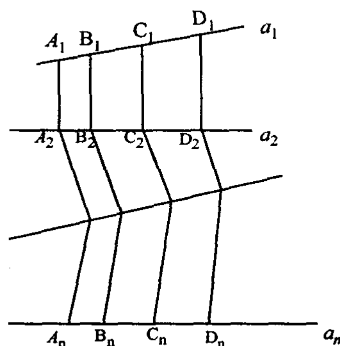


图 3.3

即 $A_n=T(A_1)=T_{n-1}\cdots T_2T_1(A_1)$，$B_n=T(B_1)$，$C_n=T(C_1)$，… .所以

仿射对应就是有限次平行射影的乘积，或仿射是透视仿射链.

同样可得平面到平面的仿射是由有限回平面到平面的平行射影的组成的.

三、自对应元素

在直线到直线的平行射影 T 中，直线 a 和 a' 交点称为平行射影的自对应点（$a/\!/a'$ 时为 P_∞）.同样，在平面到平面的透视仿射中，π 与 π' 的交线 g（自对应点的轨迹）称为透视仿射的自对应直线,也叫对应轴（$\pi/\!/\pi'$ 时为 l_∞）.显然，原象点的连线 a 与映象点的连线 a'，或交于对应轴 g 上一点，或 $a/\!/a'/\!/g$.

四、平面内的仿射对应

1. 平面到自身的平行射影：

如图 3.4，设 T_1 是平面 π 到平面 π' 的透视仿射，T_2 是平面 π' 到平面 π 的透视仿射.则 T_1 使直线 a 上的点 A，B，…对应直线 a' 上

的点 A'，B'，…；T_2 使直线 a' 上的点 A'，B'，…对应直线 a_1 上的点 A_1，B_1，… .从而得平面 π 到自身的仿射对应 $T=T_2T_1$，且 T 使直线 a 上的点 A，B，…对应直线 a_1 上的点 A_1，B_1，….又因为 $AA'//BB'//\cdots$，$A'A_1//B'B_1//\cdots$，所以 $AA_1//BB_1//\cdots$（对应点的连线互相平行），即 T 为平行射影,称为平面内的**透视仿射**.易见 T 保留同素性和接合性，平面 π 上有一条直线 g 为对应轴，其上每一点为自对应点，且 π 上 T 的一对对应直线（如 a 与 a_1），要么相交于对应轴上的同一点，要么与对应轴平行.

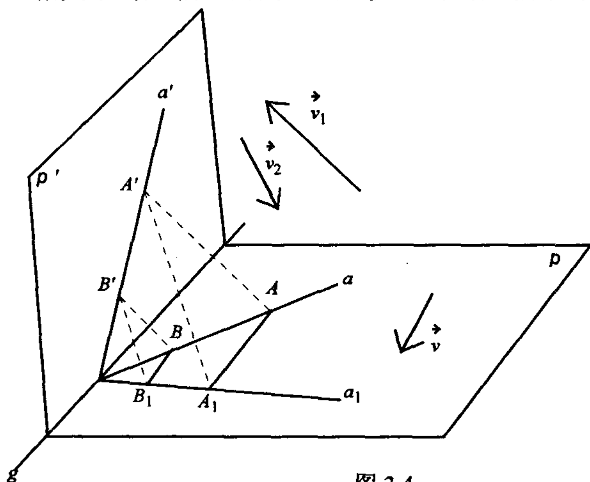


图 3.4

例 3.1 已知平面内透视仿射 T 的对应轴 g 和一对对应点 A 与 A' 且 $A'=T(A)$，求作 B 的对应点 $B'=T(B)$.

作法：(1)连接 AB 交 g 于 X，(2)过 B 作 AA' 的平行线交 XA' 于 B'.

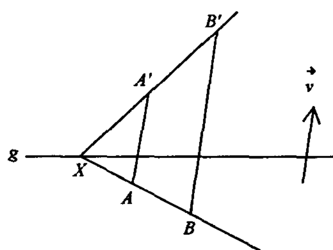


图 3.5

B' 就是所求 B 的对应点 T

(B)(如图 3.5).

证明:T 的对应轴为 g,T 的方向为 $\vec{v}$ // AA'.

因为 $A'=T(A)$,$X=T(X)$(自对应点),则 $T(XA)=XA'$.

又 $B\in XA$,所以 $B'\in XA'$. 即 B 的对应点只能是过 B 且平行于 $\vec{v}$ 的直线与 XA' 的交点.

由例 1 可知,**平面内的透视仿射**由**对应轴和一对对应点完全决定**.

2. **平面内的一般仿射**:

由有限次平面到自身的平行射影的乘积叫平面内的**仿射变换**. 其同样保留同素性和接合性.

定理 3.1 给定平面内的两个三角形,至多利用三回平行射影使一个三角形变为另一个三角形.

证明:如图 3.6,已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$.

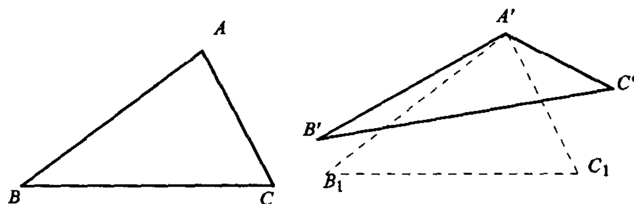


图 3.6

(1)把 $\triangle ABC$ 平移到 $\triangle A'B_1C_1$ 使 A 与 A' 重合,则得一回平行射影 $T_1(\triangle ABC)=\triangle A'B_1C_1$ (对应顶点的连线互相平行).

(2)以 $A'B_1$ 为对应轴,C_1、C' 为一对对应点可决定一回平行射影 $T_2(\triangle A'B_1C_1)=\triangle A'B_1C'$.

(3)以 $A'C'$ 为对应轴,B_1、B' 为一对对应点可决定一回平行射影 $T_3(\triangle A'B_1C')=\triangle A'B'C'$.

若 A 与 A' 重合时 C_1 与 C' 重合,则只需两回平行射影;若 A 与 A' 重合时 C_1 与 C' 重合,B_1 与 B' 也重合,则只需一回平行射影.

令 $T=T_3T_2T_1$,则 T 为平面内的**仿射变换**. **在一对对应三角形之**

间一定存在一个仿射 T 使 $T(\triangle ABC)=\triangle A'B'C'$.

§ 3.2 仿射不变性与不变量

经过任意平行射影不变的性质和数量，是仿射几何研究的对象，叫做仿射不变性与不变量.

一、仿射不变性

1．同素性和接合性是仿射不变性.

2．平行性是仿射不变性.

定理 3.2 二直线间的平行性是仿射不变性.

证明： 如图 3.7，设仿射 T 使平面 π 内直线 a，b 对应平面 π' 内直线 a'，b'，且 $a/\!/b$，欲证 $a'/\!/b'$（反证法）.

设 $a'\not\parallel b'$，则 $a'\times b'=P'\in\pi'$. 由同素性，$\exists P\in\pi$，使 $T(P)=P'$. 而 $P'\in a'$，$P'\in b'$，由接合性，$P\in a$ 且 $P\in b$，所以 $a\times b=P\in\pi$，即 $a\not\parallel b$.这与 $a/\!/b$ 矛盾，因此，$a'/\!/b'$.

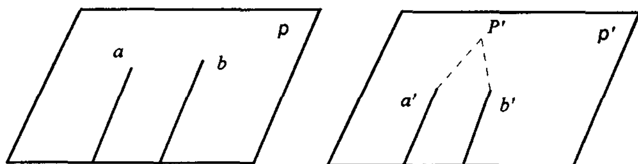


图 3.7

二、仿射不变量

1．简比：设 A、B、C 共线，则有向线段的数量比 AC/BC 叫做共线三点 A、B、C 的简比，记作

$$(A,B,C)=\frac{AC}{BC}.$$

注：

（1）C 在 AB 上（内分点）时，简比（A，B，C）<0；特别当 C 为 AB 的中点时，简比（A，B，C）= -1.

（2）C 在 AB 的延长线上（外分点）时，简比（A，B，C）> 0.

（3）若点 C 分割线段 AB 的分割比是 λ，则

$$\lambda = AC / CB = -AC / BC = -(A, B, C).$$

定理 3.3 共线三点的简比是仿射不变量.

证明： 如图 3.8，因为 $AA' // BB' // CC'$，所以

$$(A,B,C) = \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'} = (A',B',C').$$

即经过一回平行射影简比保持不变，从而经过平行射影链简比也保持不变.

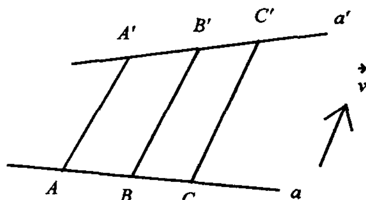


图 3.8

2．二平行线段之比：

定理 3.4 两条平行线段之比是仿射不变量.

证明： 设在平面 π 内仿射 T 使 $T(AB // CD) = (A'B' // C'D')$，

如图 3.9，在平面 π 内过 C 作 $CE // DB$ 交 AB 于 E，在平面 π' 内过 C' 作 $C'E' // D'B'$ 交 $A'B'$ 于 E'，则 $T(E) = (E')$，由定理 3.3，$(AEB) = (A'E'B')$，因此

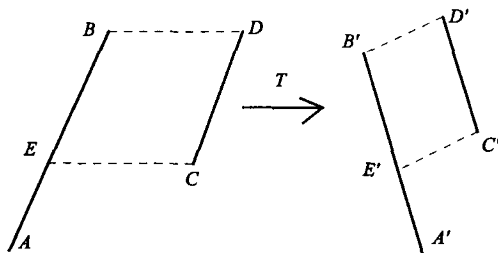


图 3.9

$$\frac{AB}{EB}=\frac{A'B'}{E'B'}$$

即

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}.$$

3．一直线上二线段之比：

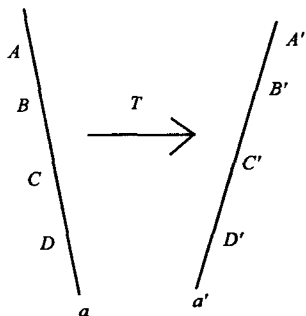


图 3.10

定理 3.5 一条直线上的两条线段之比是仿射不变量.

证明：如图 3.10，设仿射 T 使直线 a 上的点 A，B，C，D 对应直线 a' 上的点 A'，B'，C'，D'，则

$$\frac{AB}{CD}=\frac{AB}{CB}\cdot\frac{CB}{CD}=(ABC)\cdot(BDC),$$

而

$$\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{A'B'}{C'B'}\cdot\frac{C'B'}{C'D'}=(A'B'C')\cdot(B'D'C').$$

由定理 3.3，$(ABC)(BDC)=(A'B'C')(B'D'C')$，所以

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}.$$

三、平面仿射几何基本定理

定理 3.5 三对对应点（原象、映象都不共线）可唯一决定一个仿射变换.

证明：如图 3.11，设 P_1，P_2，$P_3\in\pi$ 和 P_1'，P_2'，$P_3'\in\pi$ 各构成一个三角形，由定理 3.1 必有仿射 T 使 $T(P_1,P_2,P_3)=(P_1',P_2',P_3')$ 这就证明了 T 的存在性，下面证明 T 的唯一性：

若还有仿射 T_* 使 $T_*(P_1,P_2,P_3)=(P_1',P_2',P_3')$，欲证 $T=T_*$.

设 $\forall P\in\pi$，$T(P)=P'$，$T_*(P)=P_*'$ 且 $P_1P\times P_2P_3=Q$，$T(Q)=Q'$，$T_*(Q)=Q_*'$. 因为在仿射 T 和 T_* 下，接合性和简比都保持不变，所以

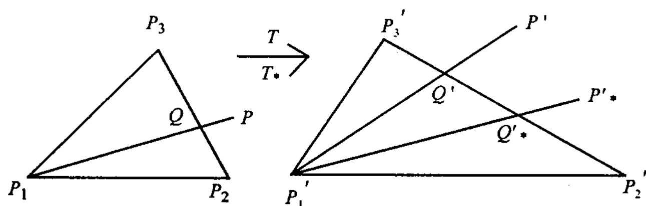


图 3.11

$$(P_1, Q, P) = (P_1', Q', P') = (P_1', Q_*', P_*'),$$
$$(P_2, Q, P_3) = (P_2', Q', P_3') = (P_2', Q_*', P_3'),$$

从而 $Q' \equiv Q_*'$，$P' \equiv P_*'$，即对 $\forall P \in \pi$ 都有 $T(P) = T_*(P)$，则

$$T = T_* .$$

§3.3 仿射的代数式

一、仿射变换的表达式

如图 3.12，平面 π 上的笛氏坐标系中，E 为单位点，其在 x 轴和 y 轴上的射影点为 E_1，E_2，$\forall P \in \pi$ 在 x 轴和 y 轴上的射影点为 P_1，P_2. 设仿射 T 使平面 π 上的点 O，E、E_1、E_2，P、P_1、P_2 对应平面 π' 上的点 O'，E'、E_1'、E_2'，P'、P_1'、P_2'，由仿射不变性知 $O'E_1'E'E_2'$ 和 $O'P_1'P'P_2'$ 为平行四边形.由仿射几何基本定理知仿射 T 可由三对对应点唯一决定.

设 $O(0, 0)$，$E_1(1, 0)$，$E_2(0, 1)$；$O'(a_0, b_0)$，$E_1'(a_1, b_1)$，$E_2'(a_2, b_2)$.

现在讨论 P 的坐标 (x, y) 与 P' 的坐标 (x', y') 之间的关系：

由简比是仿射不变量得

$$x = \frac{OP_1}{OE_1} = (P_1E_1O) = (P_1'E_1'O') = \frac{O'P_1'}{O'E_1'},$$
$$y = \frac{OP_2}{OE_2} = (P_2E_2O) = (P_2'E_2'O') = \frac{O'P_2'}{O'E_2'}.$$

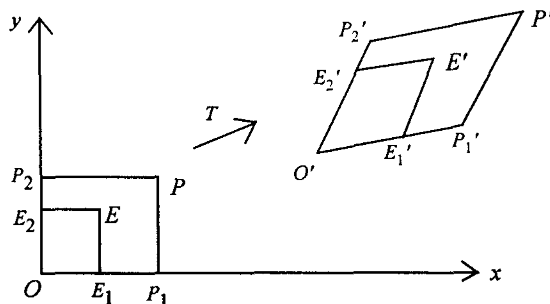


图 3.12

因此

$$\overrightarrow{O'P'}=\overrightarrow{O'P_1'}+\overrightarrow{O'P_2'}=x\overrightarrow{O'E_1'}+y\overrightarrow{O'E_2'}.$$

用坐标表示为

$$\begin{cases}x'-a_0=x(a_1-a_0)+y(a_2-a_0),\\ y'-b_0=x(b_1-b_0)+y(b_2-b_0).\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x'=\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_0,\\ y'=\beta_1x+\beta_2y+\beta_0.\end{cases}$$

由于不共线三点 O、E_1、E_2 的映象 O'、E_1'、E_2' 也不共线，则

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1-a_0 & a_2-a_0\\ b_1-b_0 & b_2-b_0\end{vmatrix}\neq 0.$$

即 T 的逆变换一定存在：

$$\begin{cases}x=a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13},\\ y=a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23},\end{cases}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0.$$

二、仿射表达式的应用

定理 3.6 任意两个三角形的面积之比是仿射不变量.

证明：设仿射 T 使 T（$\triangle ABC$）=（$\triangle A'B'C'$）. 设$\triangle ABC$ 的顶点坐标为 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），C（x_3，y_3），$\triangle A'B'C'$ 的顶点

坐标为 A'（x_1'，y_1'），B'（x_2'，y_2'），C'（x_3'，y_3'），则

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}_{\text{绝对值}}.$$

$$S_{\Delta A'B'C'}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1' & y_1' & 1\\ x_2' & y_2' & 1\\ x_3' & y_3' & 1\end{vmatrix}_{\text{绝对值}}.$$

由仿射 T 的代数式

$$\begin{cases}x'_i=\alpha_1 x_i+\alpha_2 y_i+\alpha_0\\ y'_i=\beta_1 x_i+\beta_2 y_i+\beta_0\end{cases}(i=1,2,3).$$

可得

$$S_{\Delta A'B'C'}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\alpha_1 x_1+\alpha_2 y_1+\alpha_0 & \beta_1 x_1+\beta_2 y_1+\beta_0 & 1\\ \alpha_1 x_2+\alpha_2 y_2+\alpha_0 & \beta_1 x_2+\beta_2 y_2+\beta_0 & 1\\ \alpha_1 x_3+\alpha_2 y_3+\alpha_0 & \beta_1 x_3+\beta_2 y_3+\beta_0 & 1\end{vmatrix}_{\text{绝对值}}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & 0\\ \alpha_2 & \beta_2 & 0\\ \alpha_0 & \beta_0 & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}_{\text{绝对值}}$$

$$=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\cdot S_{\Delta ABC}=k\cdot S_{\Delta ABC}.$$

因此

$$\frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}}=k.$$

这表明两个三角形的面积之比是仿射不变量.

推论 1 任意两个多边形面积之比是仿射不变量.

证明：设仿射变换下一对对应多边形的面积为 S 和 S'，因为任意一个多边形可分解成多个三角形之和，则 $S=S_1+S_2+\cdots$，$S'=S_1'+S_2'+\cdots$（S_i、S_i' 为三角形面积）. 由 Th3.6，$S_i'=kS_i$，所以

$$S'=S_1'+S_2'+\cdots=kS_1+kS_2+\cdots=kS.$$

推论 2 任意两条封闭凸曲线围成的图形面积之比是仿射不变量.

证明：设仿射变换下一对对应的封闭凸曲线围成的面积为 S 和 S'，其对应内接 n 边形的面积分别为 S_n 和 S_n'，则

$$S_n'=k\,S_n\ .$$

当 $n\to\infty$ 时 $S=S_n$，$S'=S_n'$，所以取极限得 $S'=kS$.

例 3.2 利用仿射变换求椭圆的面积.

解：设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

取仿射变换为

$$T:\begin{cases}x'=x,\\ y'=\dfrac{a}{b}y.\end{cases}$$

经仿射 T 椭圆变为圆

$$x^2+y^2=a^2.$$

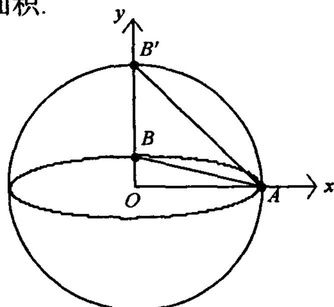


图 3.13

如图 3.13，在椭圆上取 A（a，0），B（0，b），其中心为 O（0，0），则

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab.$$

设 T（$\triangle OAB$）=$\triangle OAB'$，B'（0，a），则

$$S_{\Delta OAB'}=\frac{1}{2}a^2.$$

由推论 2 有

$$\text{椭圆面积}:S_{\triangle OAB}=\text{圆面积}:S_{\triangle OAB'},$$

所以

$$椭圆面积 = \frac{\pi a^2}{\frac{1}{2}a^2}\cdot\frac{1}{2}ab.$$

即

$$椭圆面积 = \pi ab.$$

习题三

1. 举例说明中心射影一般不保留共线三点的简比.

2. 分别举出两次平行射影的乘积仍为平行射影、两次平行射影的乘积不是平行射影的例子.

3. 证明线段的中点、三角形的中线和重心、图形的对称中心是仿不变性，角的平分线、两直线的垂直、图形的对称轴不是仿射不变性.

4. 问下列图形在仿射变换下分别变为什么图形：

（1）梯形，（2）圆，（3）两个全等矩形，（4）两条等长的线段.

5. 直线 $x+3y-6=0$ 交 A（-3，2）、B（6，1）的连线于 P 点，求简比（ABP）.

6. 给出定点 A、B，求作点 C 使：

（1）（ABC）= -1,（2）（ABC）=3,（3）（ABC）=-2/3.

7. 如图 3.14，给定一个梯形 $ABCD$ 和三角形 $A'B'C'$，设仿射 T 使：$T(A)=A'$，$T(B)=B'$，$T(C)=C'$，求作 $D'=T(D)$.

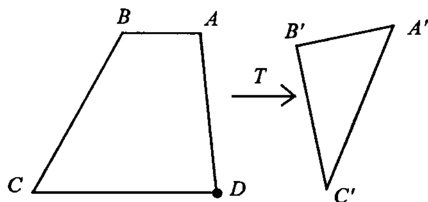


图 3.14

8. 给定两个仿射变换

$$T_1:\begin{cases}x'=x,\\y'=x+y;\end{cases}\qquad T_2:\begin{cases}x'=3x+2,\\y'=y-3.\end{cases}$$

求 T_1T_2 和 T_2T_1 的表达式（从而得出 $T_1T_2\neq T_2T_1$ 的结论）.

9. 求使三点 A（0，0）、B（1，1）、C（1，-1）分别变为三点 A'（2，3）、B'（2，5）、C'（3，-7）的仿射变换表达式.

10. 利用仿射变换表达式证明共线三点的简比是仿射不变量.

11. 求仿射变换

$$T:\begin{cases}x'=3x-y+4,\\y'=4x-2y.\end{cases}$$

的自对应点.

12. 如图 3.15，从椭圆（中心为 O）外一点 P 引它的切线 PA、PB（A、B 为切点），设 OP 交椭圆于点 C，$S_{\triangle AOC}=S_{\triangle BOC}$，求证面积 $S_{\triangle AOC}=S_{\triangle BOC}$，$S_{\triangle AOP}=S_{\triangle BOP}$.

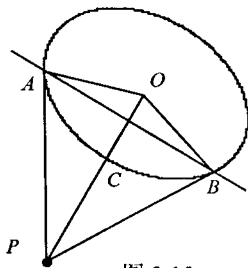


图 3.15

第四章　一维射影几何学

本章在射影平面上讨论一维射影几何学.首先对一维基本形引入基本射影不变量——交比，然后重点讨论一维基本形间的射影对应，最后介绍一维射影对应的重要特例——透视对应与对合对应.

本章的知识结构为

$$\text{一维基本形} \to \begin{Bmatrix}\text{点列}\\ \text{线束}\end{Bmatrix} \to \text{交比},$$

$$\Rightarrow \text{一维射影对应} \to \begin{Bmatrix}\text{点列} \ \overline{\wedge}\ \text{点列}\\ \text{线束} \ \overline{\wedge}\ \text{线束}\\ \text{点列} \ \overline{\wedge}\ \text{线束}\end{Bmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\text{透视对应}\\ \text{对合对应}\end{cases}.$$

§4.1　一维基本形的交比

一、一维基本形

1. 点列：在平面内一直线 l 上的所有点 P 的集合称为以 l 为底的点列，记作 $l(P)$.

设两点 A，B 的（齐次）坐标矢量为 $\vec{a}\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, $\vec{b}\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$, $\vec{x}\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$. 则 $A\equiv B$ 的充要条件是 $a_1:a_2:a_3=b_1:b_2:b_3$，即 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 线性相关.

若 A、B 是不同的两点（$\vec{a}$、$\vec{b}$ 线性无关），则 A、B 连线 l 上

的所有点 M 的集合叫做以 A、B 为基点的点列. 由矢量的线性分解定理知，M 的（齐次）坐标矢量 $\vec{x}$ 可表示为 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 的线性组合，即存在数量 λ 使

$$\vec{x}=\vec{a}+\lambda\vec{b}\ （当 M\equiv A 时 \lambda=0，当 M\equiv B 时 \lambda=\infty）.$$

2. 线束：在平面上过一点 S 的所有直线 p 的集合称为以 S 为中心的线束，记作 $S(p)$.

同点列一样，过两不同直线 l（$\vec{a}$）、m（$\vec{b}$）交点 S 的所有直线 p 的集合叫做以 l、m 为基线的线束. 且 p 的（齐次）坐标矢量 $\vec{u}$ 可表示为

$$\vec{u}=\vec{a}+\lambda\vec{b}\ （当 p\equiv l 时 \lambda=0，当 p\equiv m 时 \lambda=\infty）.$$

由以上知，两个基元素确定的点列或线束，总可以用一个独立参数表示，因此称为一维基本形.

二、点列的交比

1. 定义：设 A，B，C，D 为共线四点，把有向线段的比

$$\frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC},$$

叫做这四点的交比，记作

$$(AB,CD)=\frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}.$$

注：

（1）交比与共线四点的顺序有关，顺序变了交比一般也要变. 共线四点可能的交比共有 4！=24 个.

（2）交比与简比的关系

$$(AB,CD)=\frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BD}{AD}=\frac{(ABC)}{(ABD)}.$$

（3）把比值

$$\frac{(u_1-u_3)(u_2-u_4)}{(u_1-u_4)(u_2-u_3)}$$

叫做四个数的交比，记作

$$(u_1u_2,u_3u_4)=\frac{(u_1-u_3)(u_2-u_4)}{(u_1-u_4)(u_2-u_3)}.$$

2. 性质：

定理 4.1 设两点 $A(\vec{a})$、$B(\vec{b})$ 为基点的点列中 C、D 的坐标为

$$\vec{a}+\lambda_1\vec{b}\text{、}\vec{a}+\lambda_2\vec{b}$$

则. $(AB, CD)=\lambda_1/\lambda_2$

证明：设 A、B 的齐次坐标分别是 (a_1, a_2, a_3) ,(b_1, b_2, b_3), 非齐次坐标分别为

$$x_1=\frac{a_1}{a_3},y_1=\frac{a_2}{a_3}\text{与}x_2=\frac{b_1}{b_3},y_2=\frac{b_2}{b_3}.$$

则 C 点的非齐次坐标为 (x, y) 且

$$x=\frac{a_1+\lambda_1b_1}{a_3+\lambda_1b_3}=\frac{\dfrac{a_1}{a_3}+\lambda_1\dfrac{b_3}{a_3}\cdot\dfrac{b_1}{b_3}}{1+\lambda_1\dfrac{b_3}{a_3}}=\frac{x_1+(\lambda_1\dfrac{b_3}{a_3})x_2}{1+(\lambda_1\dfrac{b_3}{a_3})},$$

y 也有类似的结果，所以 C 点分割线段 AB 的分割比是

$$(-\lambda_1\frac{b_3}{a_3}),$$

因此

$$(ABC)=(-\lambda_1\frac{b_3}{a_3}),$$

同理

$$(ABC)=(-\lambda_2\frac{b_3}{a_3}).$$

故 $(AB, CD)=\lambda_1/\lambda_2$.

定理 4.2 设点列中四点 A，B，C，D 的齐次坐标为 $\vec{p}+u_i\vec{q}(i=1,2,3,4)$，则

$$(AB, CD) = (u_1, u_2, u_3, u_4).$$

证明：设$\vec{a}=\vec{p}+u_1\vec{q}$，$\vec{b}=\vec{p}+u_2\vec{q}$.则

$$\vec{p}=\frac{u_2}{u_2-u_1}\vec{a}+\frac{-u_1}{u_2-u_1}\vec{b},$$

$$\vec{q}=\frac{-1}{u_2-u_1}\vec{a}+\frac{1}{u_2-u_1}\vec{b}.$$

从而四点A，B，C，D的齐次坐标为

$$\vec{a},\vec{b},\vec{a}+\frac{u_1-u_3}{u_3-u_2}\vec{b},\vec{a}+\frac{u_1-u_4}{u_4-u_2}\vec{b}.$$

由定理4.1得

$$(AB,CD)=\frac{(u_1-u_3)(u_2-u_4)}{(u_1-u_4)(u_2-u_3)}=(u_1,u_2,u_3,u_4).$$

定理 4.3 在共线四点中，某两点交换位置的同时互换其余两点的位置，交比不变.即

$$(AB, CD) = (BA, DC) = (CD, AB) = (DC, BA).$$

定理 4.4 在两对点A、B与C、D的交比中，只限于一对点之间的交换，交比变为原交比的倒数. 即

$$(AB,DC)=\frac{1}{(AB,CD)},(BA,CD)=\frac{1}{(AB,CD)}.$$

定理 4.3 与定理 4.4 的证明由交比定义直接可得.

定理 4.5 在共线四点中，只交换中间两点的位置，交比变为1与原交比的差. 即

$$(AC, BD) =1 -.$$

证明：因为

$$(AC,BD)+(AB,CD)=\frac{AB\cdot CD}{AD\cdot CB}+\frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}$$

$$=\frac{AB\cdot DC+(AD+DC)BD}{AD\cdot BC}=\frac{DC(AB+BD)+AD\cdot BD}{AD\cdot BC}$$

$$=\frac{DC\cdot AD+AD\cdot BD}{AD\cdot BC}=\frac{BD+DC}{BC}=\frac{BC}{BC}=1.$$

所以

$$(AC, BD) = 1 - (AB, CD).$$

定理 4.6 共线四点可能的 24 个交比中，不相等的一般有 6 个. 若四点为不重合的实点，则其交比有相等的充要条件是 6 个交比等于-1，2 或 1/2.

证明：由定理 4.3～定理 4.5，共线四点可能的 24 个交比 6 组：

(1) $(AB, CD) = (BA, DC) = (CD, AB) = (DC, BA) = r$;

(2) $(AB, DC) = (BA, CD) = (CD, BA) = (DC, AB) = 1/r$;

(3) $(AC, BD) = (BD, AC) = (CA, DB) = (DB, CA) = 1-r$;

(4) $(AC, DB) = (BD, CA) = (CA, BD) = (DB, AC) = 1/(1-r)$;

(5) $(AD, BC) = (BC, AD) = (CB, DA) = (DA, CB) = (r-1)/r$;

(6) $(AD, CB) = (BC, DA) = (CB, AD) = (DA, BC) = r/(r-1)$.

若 $r=1/r$，则 $r=\pm 1$；若 $r=1-r$，则 $r=1/2$；

若 $r=1/(1-r)$或 $r=(r-1)/r$，则 $r = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$；

若 $r=r/(r-1)$，则 $r=0$ 或 2.

以上各种情形可归结为

①$r=1$ 或 $r=0$ 时，6 个交比为：1，1，0，∞，0，∞；
或 0，∞，1，1，∞，0.

当 $(AB, CD)=1$ 时 $A\equiv B$ 或 $C\equiv D$，当 $(AB, CD)=0$ 时 $A\equiv C$ 或 $B\equiv D$，当 $(AB, CD)=\infty$时 $A\equiv D$ 或 $B\equiv C$.

②$r=-1$ 或 $r=1/2$ 或 $r=2$ 时，6 个交比为：-1，-1，2，1/2，2，1/2；
或 1/2，2，1/2，2，-1，-1；或 2，1/2，-1，-1，1/2，2.

当 $(AB, CD) = -1$ 时 $(ABC) = -(ABD)$，即点 C 内分线段 AB，点 D 外分线段 AB，称为 **C、D 外调和分割 AB**；当 $(AB, CD) =1/2$ 即 $(AD, BC) = -1$ 时，B、C 外调和分割 AD；当 $(AB, CD) =2$ 即 $(AC, BD) = -1$ 时，B、D 外调和分割 AC.

③ $r=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 时，6 个交比为虚数.

3. **调和点列**：若（AB，CD）= -1 或 2 或 1/2，则称 A，B，C，D 为调和点列.

定理 4.7 设 O 为 CD 的中点，则

$$(AB,CD)=-1 \Leftrightarrow OC^2=OA\cdot OB$$

证明：$\Rightarrow$) 由（AB，CD）= -1 得

$$AC\cdot BD+AD\cdot BC=0,$$

则

$$(OC-OA)(OD-OB)+(OD-OA)(OC-OB)=0,$$

从而

$$2(OA\cdot OB+OC\cdot OD)=(OA+OB)(OC+OD),$$

由于 $OC=-OD$，所以

$$2(OA\cdot OB-OC^2)=(OA+OB)\cdot 0=0,$$

即

$$OC^2=OA\cdot OB.$$

$\Leftarrow$) 由 $OC^2=OA\cdot OB$，$OC=-OD$ 得

$$OA\cdot OB+OC\cdot OD=0,\ (OA+OB)(OC+OD)=0,$$

从而

$$2(OA\cdot OB+OC\cdot OD)=(OA+OB)(OC+OD),$$

则

$$(OC-OA)(OD-OB)+(OD-OA)(OC-OB)=0,$$

即

$$(AB,CD)=-1.$$

三、线束的交比

1. 定义：

(1)设 a、b、c 为共点的三直线，则

$$(abc)=\frac{\sin(a,c)}{\sin(b,c)}$$

称为三直线的简比，其中（a，c）、（b，c）表示直线 a、c 与 b、c 的有向夹角.

(2) 设 a、b、c、d 为共点的四直线，则把两个简比（abc）与（abd）的比称为四直线的交比.即

$$(ab,cd)=\frac{(abc)}{(abd)}=\frac{\sin(a,c)\cdot\sin(b,d)}{\sin(a,d)\cdot\sin(b,c)}.$$

2. 调和线束：

线束的交比与点列的交比有类似对偶的性质.特别地，若$(ab,cd)=-1$，则称 a、b、c、d 为调和线束.

3.线束交比与点列交比的关系：

定理 4.8 设线束 $S(p)$中的四直线 a、b、c、d 为被任意一条直线 l 截于四点 A、B、C、D，则

$$(ab,\ cd)=(AB,\ CD).$$

证明： 用 A、B、C、D，S 和 a、b、c、d，l，既表示点或直线的名称，又表示点或直线的齐次坐标.

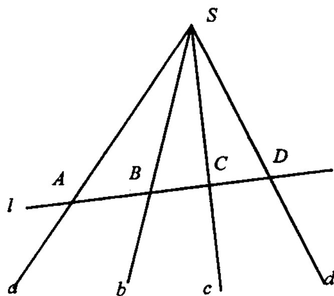


图 4.1

如图 4.1，设线束 a、b、c、d 中 $c=a+\lambda_1 b$，$d=a+\lambda_2 b$，则

$$(ab,\ cd)=\lambda_1/\lambda_2.$$

由于 $A=a\times l$，$B=b\times l$，则

$$C=c\times l=(a+\lambda_1 b)\times l=(a\times l)+\lambda_1(b\times l)=A+\lambda_1 B,$$

$$D=d\times l=(a+\lambda_2 b)\times l=(a\times l)+\lambda_2(b\times l)=A+\lambda_2 B,$$

所以

$$(AB,\ CD)=\lambda_1/\lambda_2.$$

即

$$(ab,\ cd)=(AB,\ CD).$$

例 4.1 设 D_∞为仿射直线 AB 上的无穷远点，试证

点 C 是线段 AB 的中点 $\Leftrightarrow$ （AB，CD_∞）= -1.

证明：设 A、B 的非齐次坐标为（x_1，y_1）和（x_2，y_2），点 D 分割线段 AB 的分割比是 λ，则 D 的非齐次坐标为

$$\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right),$$

故 D 的齐次坐标为

$$(x_1+\lambda x_2,\ y_1+\lambda y_2,\ 1+\lambda).$$

因为 D 为无穷远点，所以 $1+\lambda=0$，$\lambda=-1$.

从而

$$(ABD_\infty)=1.$$

$\Rightarrow$)因为 C 是 AB 的中点，所以（ABC）= -1，则

$$(AB,CD_\infty)=(ABC)/(ABD_\infty)=-1/1=-1.$$

$\Leftarrow$)由（AB，CD_∞）=（ABC）/（ABD_∞）= -1，（ABD_∞）= 1 得（ABC）= -1，所以点 C 是线段 AB 的中点.

例 4.2 试证一角的两边和这角的内外角平分线成调和线束.

证明：如图 4.2，设角的两边分别为 a、b，其内、外角平分线为 c、d（$c\perp d$）. 则

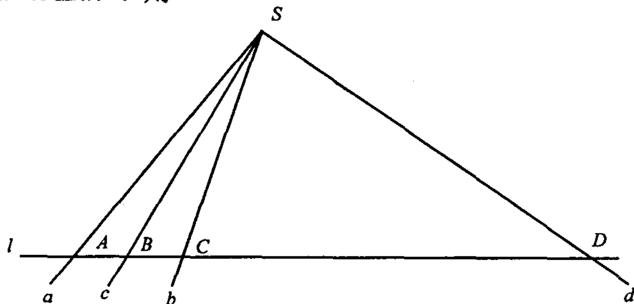


图 4.2

$$(ab,cd)=\frac{(abc)}{(abd)}=\frac{\sin(a,c)\cdot\sin(b,d)}{\sin(a,d)\cdot\sin(b,c)}.$$

而（a，c）= -（b，c），于是

$$(abc)=\frac{\sin(a,c)}{\sin(b,c)}=-1,$$

$$(abd)=\frac{\sin(b,d)}{\sin(a,d)}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-(c,b))}{\sin(\frac{\pi}{2}+(a,c))}=\frac{\cos(c,b)}{\cos(a,c)}=1,$$

所以

$$(ab,\ cd)=-1.$$

§4.2　一维射影对应

一、定义

设两个一维基本形为 $A(\vec{p}+u\vec{q})$ 与 $B(\vec{p}'+u'\vec{q}')$，若对应参数 u 与 u' 满足行列式不为 0 的双一次关系：

$$auu'+bu+cu'+d=0 \text{ 且} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0,\cdots(1)$$

则称这两个一维基本形是射影对应的，记作 $A\overline{\wedge}B$.

此时，把

$$u'=\frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta} \text{ 且} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -b & -d \\ a & c \end{vmatrix} \neq 0,\cdots(2)$$

叫做 u 的射影函数.

把（1）和（2）都叫做一维射影对应的代数式.

显然，两个一维基本形 A 与 B 的射影对应包括：①点列$\overline{\wedge}$点列，②线束$\overline{\wedge}$线束，③点列$\overline{\wedge}$线束(或线束$\overline{\wedge}$点列).

二、性质

1．射影对应具有对称性和传递性：

定理 4.9　若 u' 是 u 的射影函数，则 u 是 u' 的射影函数.

证明：若 u' 是 u 的射影函数，则

$$u'=\frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta}\text{且}\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0,$$

所以

$$\gamma uu'-\alpha u+\delta u'-\beta=0,$$

即

$$u=\frac{\delta u'-\beta}{-\gamma u+\alpha}\text{且}\begin{vmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{vmatrix}\neq 0.$$

因此 u 是 u' 的射影函数.

定理 4.10　若 u' 是 u 的射影函数，u'' 是 u' 的射影函数，则 u'' 是 u 的射影函数.

证明：若 u' 是 u 的射影函数，u'' 是 u' 的射影函数，则

$$u'=\frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta}\text{且}\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0,\ u''=\frac{\alpha' u'+\beta'}{\gamma' u'+\delta'}\text{且}\begin{vmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{vmatrix}\neq 0.$$

从而

$$u''=\frac{\alpha'' u+\beta''}{\gamma'' u+\delta''}\text{且}\begin{vmatrix}\alpha'' & \beta''\\ \gamma'' & \delta''\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{vmatrix}\neq 0.$$

因此 u'' 是 u 的射影函数.

2．射影对应的几何特征：

定理 4.11　两个一维基本形成射影对应$\Leftrightarrow$对应四元素的交比相等.

证明：$\Rightarrow$)设 A（$\vec{p}+u\vec{q}$）$\overline{\wedge}$ B（$\vec{p}'+u'\vec{q}'$），对应四元素的参数为 u_1，u_2，u_3，u_4 和 u_1'，u_2'，u_3'，u_4'. 欲证

$$(u_1u_2,\ u_3u_4)=(u_1'u_2',\ u_3'u_4').$$

由于

$$u'=\frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta}\text{且}\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0,$$

则

$$u_i'=\frac{\alpha u_i+\beta}{\gamma u_i+\delta}(i=1,2,3,4).$$

于是

$$u_i'-u_j'=\frac{\alpha u_i+\beta}{\gamma u_i+\delta}-\frac{\alpha u_j+\beta}{\gamma u_j+\delta}$$

$$=\frac{\Delta(u_i-u_j)}{(\gamma u_i+\delta)(\gamma u_j+\delta)}(i,j=1,2,3,4\text{且}i\neq j).$$

所以

$$(u_1'u_2',u_3'u_4')=\frac{(u_1'-u_3')(u_2'-u_4')}{(u_1'-u_4')(u_2'-u_3')}$$

$$=\cdots=\frac{(u_1-u_3)(u_2-u_4)}{(u_1-u_4)(u_2-u_3)}=(u_1u_2,u_3u_4).$$

⇐）设三对对应元素 u_1，u_2，u_3（互不相等）和 u_1'，u_2'，u_3'（互不相等）是固定的，第四对对应元素 u 和 u' 是可变动的. 因为（u_1u_2，u_3u）=（$u_1'u_2'$，$u_3'u'$），所以

$$\frac{(u_1-u_3)(u_2-u)}{(u_1-u)(u_2-u_3)}=\frac{(u_1'-u_3')(u_2'-u')}{(u_1'-u')(u_2'-u_3')}.$$

令

$$\lambda=\frac{(u_1-u_3)}{(u_2-u_3)}\bigg/\frac{(u_1'-u_3')}{(u_2'-u_3')},$$

则

$$\frac{(u_2'-u')}{(u_1'-u')}=\lambda\cdot\frac{(u_2-u)}{(u_1-u)}.$$

解得

$$u'=\frac{(\lambda u_1'-u_2')u+u_1u_2'-u_2u_1'}{(\lambda-1)u+(u_1-\lambda u_2)},$$

即

$$u'=\frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta},$$

且

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda u_1'-u_2' & u_1u_2'-\lambda u_2u_1' \\ \lambda-1 & u_1-\lambda u_2\end{vmatrix}$$

$$=\lambda(u_1-u_2)(u_1'-u_2')\neq 0.$$

故 $A\overline{\wedge}B$.

3．一维射影几何的基本定理：

定理 4.11 (Von Staudt 定理)三对各不相重的对应元素可决定唯一的一维射影对应.

证明：由 Th4.10 充分性的证明可得三对对应元素 u_1，u_2，u_3（互不相等）和 u_1'，u_2'，u_3'（互不相等）决定的一维射影对应 T 是存在的，且

$$T: u'=\frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta} \text{且} \begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0.$$

若还有一维射影对应 T' 使

$$T'\ (u_1,\ u_2,\ u_3,\ u)=(u_1',\ u_2',\ u_3',\ u''),$$

则同样可推得

$$T': u''=\frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta} \text{且} \begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0.$$

所以

$$T=T'.$$

即 T 是唯一的.

三、特例

把两个一维基本形都取为点列：$l(P)$和 $l'(Q)$且 $l\equiv l'$，即为同底的两点列，对应参数 7 取为笛氏坐标 x 和 x' .则射影对应式为

$$T: x'=\frac{a_{11}x+a_{12}}{a_{21}x+a_{22}} \text{且} \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0.$$

使用齐次坐标

$$x=\frac{x_1}{x_2}, x'=\frac{x_1'}{x_2'},$$

得

$$\frac{x_1'}{x_2'}=\frac{a_{11}x_1+a_{12}x_2}{a_{21}x_1+a_{22}x_2}.$$

即

$$\frac{x_1'}{a_{11}x_1+a_{12}x_2}=\frac{x_2'}{a_{21}x_1+a_{22}x_2}=\frac{1}{\rho}(\rho\neq 0),$$

则射影对应的齐次坐标表达式为

$$T:\begin{cases}\rho x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2,\\ \rho x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2,\end{cases}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0.$$

§4.3 透视与对合

一、透视对应

1. 定义：

（1）点列与线束：设点列 $l(A, B, C, D, \cdots)$与线束 $S(a, b, c, d, \cdots)$中，若 $l(A, B, C, D, \cdots)\overline{\wedge}S(a, b, c, d, \cdots)$且 $A\in a$, $B\in b$, $C\in c$, $D\in d$, …，则称点列与线束成透视对应，记作

$$l(A, B, C, D, \cdots)\overset{=}{\wedge}S(a, b, c, d, \cdots).$$

几何特征：对应点在对应线上(如图 4.3).

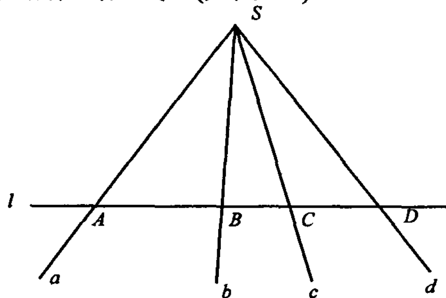


图 4.3

（2）点列与点列：若两点列与同一线束成透视对应，即
$l(A, B, C, D, \cdots) \overset{=}{\wedge} S(a, b, c, d, \cdots) \overset{=}{\wedge} l'(A', B', C', D', \cdots)$,
则称两点列成透视对应，记作

$$l(A, B, C, D, \cdots) \overset{=}{\wedge} l'(A', B', C', D', \cdots).$$

几何特征：对应点的连线共点（如图 4.4）.

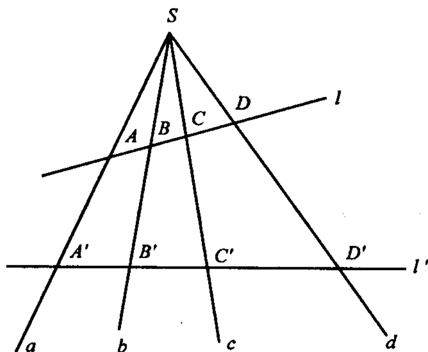


图 4.4

（3）线束与线束：若两线束与同一点列成透视对应，即
$S(a, b, c, d, \cdots) \overset{=}{\wedge} l(A, B, C, D, \cdots) \overset{=}{\wedge} S'(a', b', c', d', \cdots)$,
则称两线束成透视对应，记作

$$S(a, b, c, d, \cdots) \overset{=}{\wedge} S'(a', b', c', d', \cdots).$$

几何特征：对应线的交点共线(如图 4.5).

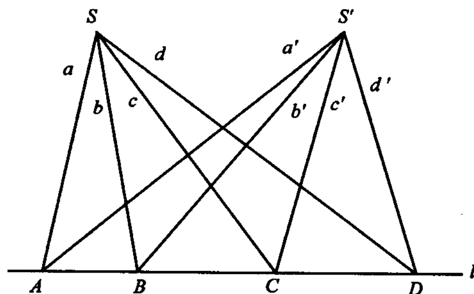


图 4.5

2.透视与射影:

定理 4.12 设点 S 不在点列 $l(A, B, C, D, \cdots)$上，则 S 与 l 上任意点的连线所成线束 $S(a, b, c, d, \cdots)\overset{=}{\wedge} l(A, B, C, D, \cdots)$.

证明 如图 4.3,因（ab, cd）=（AB, CD）(由定理 4.8)，则

$S(a, b, c, d, \cdots)\overline{\wedge} l(A, B, C, D, \cdots)$（由定理 4.11）.

又因为 $A\in a$, $B\in b$, $C\in c$, $D\in d$, …，所以

$$S(a, b, c, d, \cdots)\overset{=}{\wedge} l(A, B, C, D, \cdots)（由定义）.$$

定理 4.13 两个射影点列成透视对应的充要条件是两个点列的公共点自对应.

证明 如图 4.6,设 $l(A, B, C, \cdots)\overset{=}{\wedge} l'(A', B', C', \cdots)$，透视心为 S 且 $l\times l'=P$.则 P 在此透视中的对应点为 $P'=SP\times l'=P$.即公共点自对应.

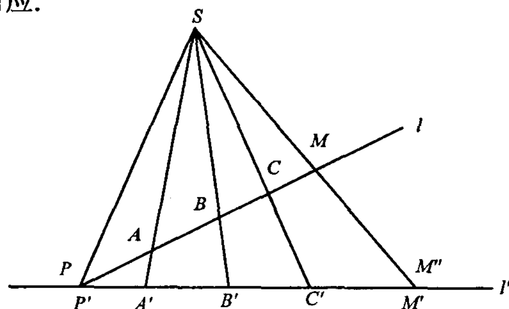


图 4.6

反之，设

$$l(A, B, C, P\cdots)\overline{\wedge} l'(A', B', C', P'\cdots),\ P\equiv P'.$$

作 $AA'\times BB'=S$，若此射影对应中的任意一对对应点为 M 和 M'，且$SM\times l'=M''$，欲证 $M''\equiv M'$（连线 MM' 也过 S）.

因为

$$(PA, BM)=(P'A', B'M'')（由定理 4.8),$$

而

$$(PA, BM)=(P'A', B'M')（由定理 4.11),$$

则

$$(P'A', B'M') = (P'A', B'M''),$$

所以 $M'' \equiv M'$（对应点的连线共点），即

$$l(A, B, C, \cdots) \overset{=}{\wedge} l'(A', B', C', \cdots).$$

定理 4.14 两个点列（不共底，不成透视）之间的射影对应由两回透视组成.

证明 如图 4.7,设 $l(A, B, C, D, \cdots) \overline{\wedge} l'(A', B', C', D', \cdots)$，因为

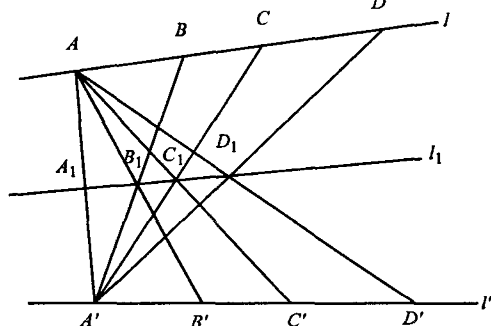


图 4.7

线束 $A'(A, B, C, D, \cdots) \overset{=}{\wedge}$

点列 $l(A, B, C, D, \cdots) \overline{\wedge}$

点列 $l'(A', B', C', D', \cdots) \overset{=}{\wedge}$ 线束 $A(A', B', C', D', \cdots)$，所以

$$A'(A, B, C, \cdots) \overline{\wedge} A(A', B', C', \cdots).$$

而公共线 $A'A \equiv AA'$ 自对应，由定理 4.13′ 得

$$A'(A, B, C, \cdots) \overset{=}{\wedge} A(A', B', C', \cdots).$$

由两个线束成透视的几何特征，得 $B_1 = A'B \times AB'$，$C_1 = A'C \times AC'$，$D_1 = A'C \times AC'$ 共线于 l_1，并设 $AA' \times l_1 = A_1$，则

$$l(A, B, C, \cdots) \overset{(A')}{\overset{=}{\wedge}} l_1(A_1, B_1, C_1, \cdots) \overset{(A)}{\overset{=}{\wedge}} l'(A', B', C', \cdots),$$

即经过两回透视将点列$(A, B, C, \cdots)$转换为点列$(A', B', C', \cdots)$.

定理 4.15 点列与线束（不成透视）之间的射影对应由三回透视组成.

证明 如图 4.8,设 $S(a, b, c, \cdots)\overline{\wedge}l'(A', B', C', \cdots)$，$S\notin l$，且 $l\times a=A$，$l\times b=B$，$l\times c=C$，…，则

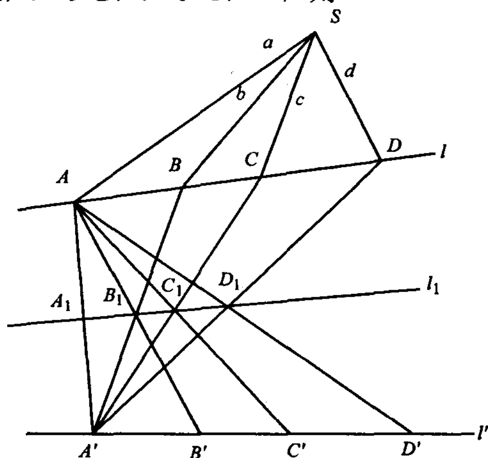


图 4.8

$$S(a, b, c, \cdots)\overset{=}{\wedge}l(A, B, C, \cdots).$$

再由定理 4.14 得

$$l(A, B, C, \cdots)\overset{=}{\wedge}l_1(A_1, B_1, C_1, \cdots)\overset{=}{\wedge}l'(A', B', C', \cdots),$$

即三回透视将线束（a，b，c，…）转换为点列$(A', B', C', \cdots)$.

定理 4.12～定理 4.15 的对偶定理请读者自证.

例 4.3 证已知一条直线 l 上三点 A、B、C 及常数 k，求作第四点 D，使$(AB, CD)=k$.

作法：如图 4.9，已知直线 l 上三点 A，B，C.

（1）过点 C 任作一直线 l_1;

（2）在 l_1 上取 A_1，B_1 使 $CA_1 : CB_1=k : 1$;

（3）过 $S=AA_1\times BB_1$ 作 $l_2 /\!/ l_1$ 且 $l_2\times l=D$.

D 就是所求作的第四点.

图 4.9

证明：由于 $l_2 // l_1$，

则 $l(A, B, C, D)(S) \overline{\overline{\wedge}}\ l_1(A_1, B_1, C, D_\infty)$

所以 $(AB, CD)=(A_1B_1, CD_\infty)=(A_1B_1C)=CA_1 : CB_1=k$.

二、完全四点（线）形的调和性质

定理 4.16 完全四点形的每一个对角点上都有一组调和线束，即完全四点形通过这个对角点的两边和对角三角形的两边（如图 4.10）.

图 4.10

定理 4.16′ 完全四线形的每一个对角线上都有一组调和点列，即完全四线形在这条对角线上的两顶点和对角三角形的两顶点（如图 4.11）.

证明 由对偶原理，只需证明其中一个定理.下面证明完全四线形的调和性质（定理 4.16′）：

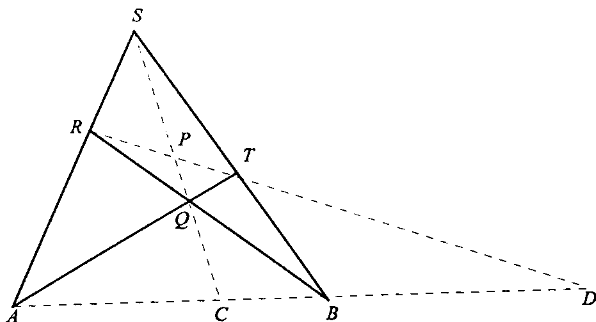


图 4.11

设 AB，SQ，RT 是完全四线形 $SRQT$ 的对角线，且 $SQ\times AB=C$，$RT\times AB=D$，$SQ\times RT=P$. 则

$$ABCD \overset{(S)}{\underset{\wedge}{=}} RTPD \overset{(Q)}{\underset{\wedge}{=}} BACD$$

所以

$$(AB,CD)=(BA,CD)=\frac{1}{(AB,CD)},$$

即

$$(AB,\ CD)^2=1$$

从而

$$(AB,\ CD)=1 \text{ 或 } (AB,\ CD)=-1.$$

因为（AB，CD）=1 导致 A、B、C、D 中某两点重合，与完全四线形不符，所以（AB，CD）=-1.同理，（SQ，PC）=-1，（RT，PD）=-1.

三、对合对应

1. 一维射影变换概念：

（1）两个同底的点列或两个共心的线束称为重叠的一维基本形.

（2）两个重叠的一维基本形之间的射影对应称为一维射影变换.

一维射影变换是特殊的一维射影对应，其代数表达式也为

$$auu' + bu + cu' + d = 0 \text{且} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

2. 一维射影变换的二重元素：

经过一维射影变换不变的元素叫做一维射影变换的二重元素.

定理 4.17 一维射影变换一般有两个二重元素.

证明 设一维射影变换为 T:

$$auu' + bu + cu' + d = 0 \text{且} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

二重元素为 s，则

$$as^2+(b+c)s+d=0.$$

(1)若 $a\neq0$，则二重元素有两个 s_1 和 s_2.

(2)若 $a=0$，$b+c\neq0$，则二重元素为 $s_1=-d/(b+c)$，$s_2=\infty$.

(3)若 $a=0$，$b+c=0$，$d\neq0$，则二重元素为 $s_1=s_2=\infty$.

(4)若 $a=b+c=d=0$，则 T：$u'=u$ 为恒等变换（记做 I），任意元素为二重元素.

根据二重元素把一维射影变换分类为

①双曲型：有两个不等的实二重元素；

②抛物型：有两个相等的二重元素；

③椭圆型：有两个不等的虚二重元素.

例 4.4 判别下列一维射影变换的类型：

（1）T：$x'=x+2$，（2）S：$x'=-x$.

解 （1）因为 $a=0$，$b+c=0$，$d\neq0$，则二重元素为 $s_1=s_2=\infty$. 所以射影变换 T 为抛物型；

（2）因为 $a=0$，$b+c\neq0$，则二重元素为 $s_1=0$，$s_2=\infty$. 所以射影变换 S 为双曲型

3. 对合定义：

在上例的射影变换 S 中，设 A 的坐标为 A（-1），则

$$S(A)=A'(1),\ S(A')=A''\equiv A,\ \text{即}$$

$$S^2(A)=A''\equiv A\ (S^2=I),$$

称 A 与 A' 为交互对应(如图 4.12).

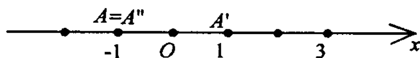


图 4.12

而在射影变换 T 中，设 A（-1），则

$$T(A)=A'(1),\ T(A')=A''(3).$$

由于 $A''\neq A$，所以 A 与 A' 不是交互对应(如图 4.13).

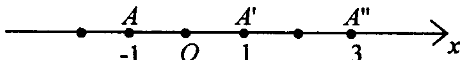


图 4.13

定义　任意一对对应元素都是交互对应的非恒等射影变换叫做对合对应.即对合 S 满足：① $S\neq I$，② $S^2=I$.

4. 对合性质：

定理 4.18　若一维射影变换中，有一对对应元素是交互对应的，则此一维射影变换一定是对合对应.

证明　设一维射影变换为 T：

$$auu'+bu+cu'+d=0\ (ad-bc\neq 0).$$

中，有一对对应元素 $u_0\neq u_0'$ 交互对应，则

$$\begin{cases} au_0u_0'+bu_0+cu_0'+d=0, \\ au_0u_0'+bu_0+cu_0'+d=0, \end{cases}$$

两式相减得

$$(b-c)(u_0-u_0')=0.$$

所以 $b=c$. 此时射影变换为 T：

$$auu'+b(u+u')+d=0\ (ad-b^2\neq 0).$$

由此式可得 $T(u)=u'$，$T(u')=u$，即 T 中任意一对对应元素为交互对应，则 T 为对合对应.

对合对应的代数表达式为

$$auu' + b(u + u') + d = 0(ad - b^2 \neq 0).$$

由一维射影几何基本定理，很快可推出：

定理 4.19　对合对应由两对对应元素唯一决定.

5.对合的二重元素：

定理 4.20　对合对应一定有两个二重元素(为不重合的实元素或共轭复元素)，且调和分割任意一对对应元素.

证明　设对合为 T（$\neq I$）:

$$auu' + b(u + u') + d = 0(ad - b^2 \neq 0).$$

则二重元素 s 满足：

$$as^2+2bs+d=0.$$

因为 $ad-b^2\neq0$，所以对合的二重元素 s_1 和 s_2，可能是不重合的实元素（双曲型），或两共轭复元素（椭圆型）.

因对合是射影变换，则保持交比不变，即（uu'，s_1s_2）=（$u'u$，s_1s_2）=1/（uu'，s_1s_2），因此

$$(uu', s_1s_2)^2=1.$$

从而（uu'，s_1s_2)=1 或（uu'，s_1s_2)= -1. 但（uu'，s_1s_2)=1 时，因 $s_1\neq s_2$，则 $u=u'$. 这与 $T\neq I$ 矛盾，故

$$(uu', s_1s_2)= -1.$$

定理 4.21　对合对应的表达式总可以简化为下面两种范式之一：

（1）$uu'=k\neq0$;

（2）$u+u'=0$.

证明　设对合为 T（$\neq I$）:

$$a\lambda\lambda'+b(\lambda + \lambda') + d = 0(ad - b^2 \neq 0).$$

若 $a\neq0$，则 T:

$$\lambda\lambda'+ \frac{b}{a}(\lambda + \lambda') + \frac{d}{a} = 0.$$

即

$$(\lambda+\frac{b}{a})(\lambda'+\frac{b}{a})=\frac{b^2-ad}{a^2}\equiv k\neq 0.$$

令

$$(\lambda+\frac{b}{a})=u,(\lambda'+\frac{b}{a})=u',$$

即得

（1）$uu'=k\neq 0$($k>0$：双曲型，$k<0$：椭圆型).

若 $a\neq 0$，则 T：

$$b(\lambda+\lambda')+d=0(b\neq 0).$$

即

$$(\lambda+\frac{d}{2b})(\lambda'+\frac{d}{2b})=0.$$

令

$$(\lambda+\frac{d}{2b})=u,(\lambda'+\frac{d}{2b})=u',$$

即得

（2）$u+u'=0$(双曲型).

例 4.3 求对合的二重元素，这个对合由下列方程的对应根决定：

（1）$x^2-1=0$ 与 $x^2-3x+1=0$；（2）$x^2-x-1=0$ 与 $2x^2-2x-1=0$.

解 （1）设所求对合为

$$auu'+b(u+u')+d=0(ad-b^2\neq 0).$$

两个方程的对应根分别是± 1 和$\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$，代入对合表达式得

$$\begin{cases}-a+d=0,\\ a+3b+d=0.\end{cases}$$

则

$$a:b:d=\begin{vmatrix}0&1\\3&1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-1&0\\1&3\end{vmatrix}=-3:2:-3.$$

所以对合为

$$-3uu'+2(u+u')-3=0.\ （椭圆型）$$

（2）设所求对合为

$$auu'+b(u+u')+d=0(ad-b^2\neq 0).$$

两个方程的对应根分别是$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$和$\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$，代入对合表达式得

$$\begin{cases}-a+b+d=0,\\ -\frac{1}{2}a+b+d=0.\end{cases}$$

则

$$a:b:d=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -1/2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1/2 & 1\end{vmatrix}=0:1/2:-1/2.$$

所以对合为

$$u+u'-1=0\ （双曲型）.$$

例 4.4 叙述并证明笛沙格对合定理.

解 笛沙格对合定理：完全四点形的三对对边与不过顶点的任意直线的交点是同一对合中的三对对应点.

证明 如图4.14,一条直线与完全四点形$ABCD$三对对边的交点为P，P'；Q，Q'；R，R'，并在这条直线上决定一个射影变换（一维射影几何基本定理），下面证明它是一个对合.

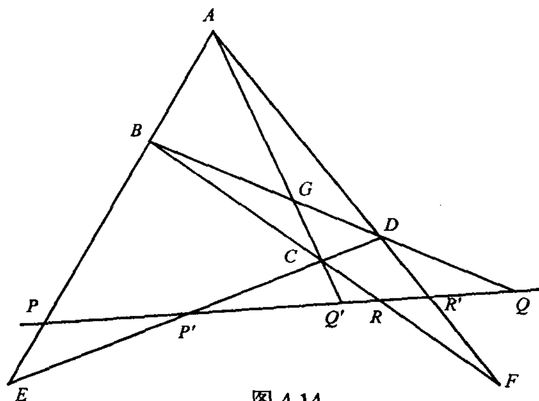


图 4.14

因为

$$(P, P', Q, R) \overset{(B)}{\overline{\overline{\wedge}}} (E, P', D, C) \overset{(A)}{\overline{\overline{\wedge}}} (P, P', R', Q'),$$

所以

$$(PP', QR) = (PP', R'Q') = (P'P, Q'R')$$

因此

$$(P, P', Q, R) \overline{\wedge} (P', P, Q', R')$$

由于此射影变换中有一对对应点 P，P' 交互对应，所以它是一个对合.

习题四

1. 直线上顺次有四点 A，B，C，D（相邻两点距离相等），求这四点的各交比值.

2. 已知四点 A（2，1，-1），B（1，-1，1），C（1，0，0），D（1，5，-5），求交比（AB，CD）.

3. 已知（k_1k_2，k_3k_4）= -1，求证

$$\frac{2}{k_2-k_1}=\frac{1}{k_3-k_1}+\frac{1}{k_4-k_1}.$$

4. 已知三点 A（1，1，1），B（1，-1，1），D（1，0，1），且交比（AB，CD）=2，求 C 点的坐标.

5. 求证四直线 $2x-y+1=0$，$3x+y-2=0$，$7x-y=0$，$5x-1=0$ 共点，并求四直线顺这次序的交比.

6. 设两点列共底，求一射影对应使 0，1，∞对应 1，∞，0.

7. 求一射影对应使直线 l 上的三点 1，2，3 对应直线 l' 上的三点：

（1）1，2，3；（2）-1，-2，-3；（3）4，3，2.

8. 讨论用几次透视可使

$$(A, B, C) \overline{\wedge} (B, A, C)$$

9. 一圆切于 x 轴和 y 轴，圆的动切线交两轴于 M 和 M'，求证

$$\{M\} \overline{\wedge} \{M'\}.$$

10. 求下列一维射影变换的二重元素：

（1）$uu'+6u+u'+6=0$，

（2）$uu'-2u+1=0$，

（3）$2u+u'+1=0$.

11. 求对合的表达式，使其二重元素为

（1）2 与 3，

（2）方程 $at^2+2bt+c=0$ 的根.

12. 如图 4.15，设 P，Q，R，S 是完全四点形的顶点，且

$$PS\times QR=A，PR\times QS=B，PQ\times RS=C.$$

求证

$$A_1=BC\times QR，B_1=CA\times RP，C_1=AB\times PQ$$

三点共线.

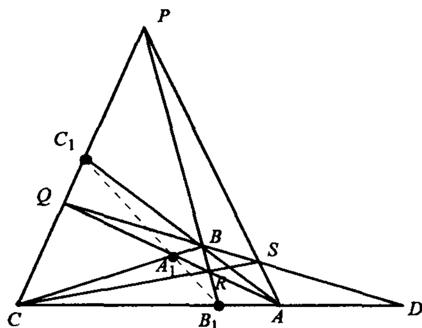
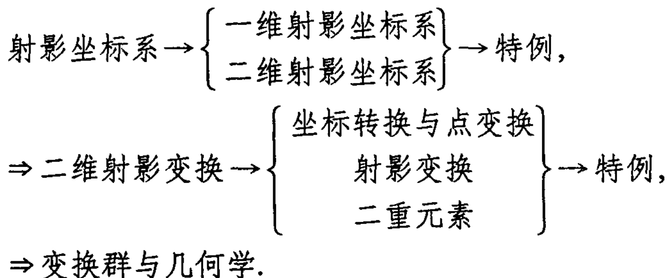


图 4.15

第五章　二维射影几何学

以前我们所用的坐标是建立在距离基础上的笛氏坐标，本章将在射影平面上建立以射影不变量——交比为基础的射影坐标系.然后用射影坐标来表示二维射影变换，并讨论其二重元素.最后用变换群的观点给出欧氏几何、仿射几何与射影几何的关系.

本章的知识结构为



§5.1　射影坐标系

我们熟悉和常用的坐标是笛卡儿直角坐标，简称笛氏坐标.下面介绍射影平面上的射影坐标.

一、一维射影坐标系

1．定义：

①在一点列上取不重合的三点 A_1，A_2，E，P 为此点列上的任意点，则交比 $\lambda=(A_1A_2, EP)$ 与点 P 之间建立了一个一一对应，把 λ 称为 P 点在一维射影坐标系 $\{A_1, A_2, E\}$ 下的坐标. 若 $\lambda=x_1/x_2$，

则称（x_1，x_2）为 P 点的齐次射影坐标，把λ称为 P 点的非齐次射影坐标.

与笛氏齐次坐标一样，对$\forall\rho\neq 0$，（ρx_1，ρx_2）与（x_1，x_2）表示同一点，（0，0）不表示任何点. 特别地，由

$$\lambda_E=(A_1A_2,EE)=\frac{A_1E\cdot A_2E}{A_1E\cdot A_2E}=1=1:1,$$

$$\lambda_{A_1}=(A_1A_2,EA_1)=\frac{A_1E\cdot A_2A_1}{A_1A_1\cdot A_2E}=\infty=1:0,$$

$$\lambda_{A_2}=(A_1A_2,EA_2)=\frac{A_1E\cdot A_2A_2}{A_1A_2\cdot A_2E}=0=0:1.$$

得 A_1（1，0），A_2（0，1），E（1，1），并分别称为第一基点，第二基点和单位点.

②在一线束中取不重合的三直线 a_1，a_2，e，p 为此线束中的任意直线，则交比λ=（a_1a_2，ep）与直线 p 之间建立了一个一一对应，把λ称为直线 p 在一维射影坐标系$\{a_1,a_2,e\}$下的坐标. 若$\lambda=u_1/u_2$，则称（u_1，u_2）为直线 p 的齐次射影坐标，把λ称为直线 p 的非齐次射影坐标.称 a_1（1，0），a_2（0，1），e（1，1）为第一基线，第二基线和单位线.

后面的内容一般用点列上的射影坐标来讨论.

2. 射影坐标与笛氏坐标：

设 A_1，A_2，E，P 的笛氏坐标为 x_1，x_2，x_e 和 x；射影坐标为 λ_1，λ_2，λ_e和λ.则

$$\lambda=(A_1A_2,EP)=(x_1x_2,x_ex)=\frac{(x_e-x_1)(x-x_2)}{(x_e-x_2)(x-x_1)},$$

所以

$$\lambda=\frac{kx-kx_2}{x-x_1}\left(k=\frac{x_e-x_1}{x_e-x_2}\right),$$

且

$$\begin{vmatrix} k & -kx_2 \\ 1 & -x_1 \end{vmatrix} = k(x2-x1) = \frac{(x_e-x_1)(x_2-x_1)}{x_e-x_2} \neq 0.$$

因此，同一点的射影坐标λ与笛氏坐标x是射影对应.从而，共线四点的交比既等于四点笛氏坐标的比，也等于四点射影坐标的比.

3．特例：

（1）一点P的仿射坐标定义为P到原点O与单位点E到O的有向距离比PO/EO.将一维射影坐标系$\{A_1，A_2，E\}$的A_1取为直线上的P_∞，A_2取为原点O，则

$$\lambda = (A_1A_2, EP) = (P_\infty O, EP) = (PEO) = \frac{PO}{EO}.$$

即此时的射影坐标特殊为仿射坐标.

（2）一点P的笛氏坐标定义为P到原点O的有向距离OP.将一维射影坐标系$\{A_1，A_2，E\}$的A_1取为直线上的P_∞，A_2取为原点O，并设A_2E为单位长度，则

$$\lambda = OP.$$

即此时的射影坐标特殊为笛氏坐标.

二、二维射影坐标系

1．齐次射影坐标：

如图 5.1,在平面内取无三点共线的四点A_1，A_2，A_3和E. 设P为平面内任意点，$\triangle A_1A_2A_3$的三边到E点的距离为e_1，e_2，e_3，到P点的距离为p_1，p_2，p_3. 则P点与三个有序的数

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{p_1}{e_1} : \frac{p_2}{e_2} : \frac{p_3}{e_3}$$

成一一对应，把（x_1，x_2，x_3）称为P点在二维射影坐标系

$$\{A_1, A_2, A_3; E\}$$

下的齐次射影坐标，把$\triangle A_1A_2A_3$叫做坐标三角形，E点叫做单位点.

与笛氏齐次坐标一样，对$\forall \rho \neq 0$，（ρx_1，ρx_2，ρx_3）与（x_1，x_2，x_3）表示同一点，（0，0，0）不表示任何点.

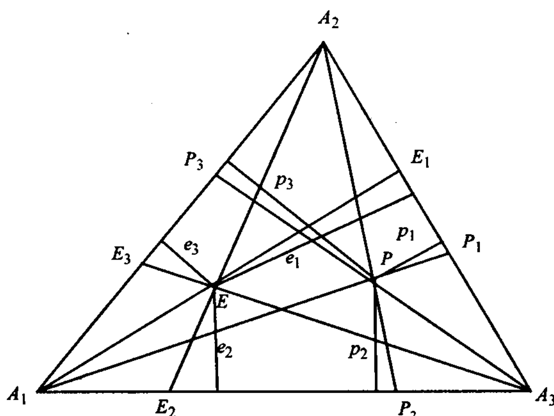


图 5.1

若 P 点在直线 A_2A_3 上，则 $p_1=0$，即 $x_1=0$，所以坐标三角形边 A_2A_3 在此坐标系下的射影方程为 $\boldsymbol{x_1=0}$. 同理，坐标三角形边 A_1A_3 在此坐标系下的射影方程为 $\boldsymbol{x_2=0}$，坐标三角形边 A_1A_2 在此坐标系下的射影方程为 $\boldsymbol{x_3=0}$.

若 P 点与 A_1 重合时，$p_2=0$，$p_3=0$，而 $p_1\neq0$，则 $x_2=0$，$x_3=0$，而 $x_1\neq0$，所以坐标三角形顶点 A_1 在此坐标系下的射影坐标是（1，0，0）.同理，坐标三角形顶点 A_2 在此坐标系下的射影坐标是（0，1，0），坐标三角形顶点 A_3 在此坐标系下的射影坐标是（0，0，1）.

2．非齐次射影坐标：

设在二维射影坐标系中，$A_i P$，$A_i E$（i=1，2，3）与坐标三角形中 A_i 的对边交于 P_i，E_i（图 5.1），则

$$
\begin{aligned}
(A_1A_3,E_2P_2) &= A_2(A_1A_3,E_2P_2) \\
&= \frac{\sin\angle(A_1A_2E_2)\sin\angle(A_3A_2P_2)}{\sin\angle(A_1A_2P_2)\sin\angle(A_3A_2E_2)} \\
&= \frac{\dfrac{e_3}{A_2E}\cdot\dfrac{p_1}{A_2P}}{\dfrac{p_3}{A_2P}\cdot\dfrac{e_2}{A_2E}} = \frac{e_3p_1}{p_3e_2} = x_1 : x_3 .
\end{aligned}
$$

同理，$(A_2A_3,\ E_1P_1)=x_2:x_3$，$(A_1A_2,\ E_3P_3)=x_1:x_2$.

把 $x=x_1:x_3=(A_1A_3,\ E_2P_2)$ 和 $y=x_2:x_3=(A_2A_3,\ E_1P_1)$ 称为 P 点在二维射影坐标系 $\{A_1,\ A_2,\ A_3;\ E\}$ 下的非齐次射影坐标.显然，二维射影坐标与一维射影坐标一样，也建立在交比的基础上.

例 5.1 利用射影坐标系证明巴卜斯（Pappus）定理.

设 A_1、B_1、C_1 和 A_2、B_2、C_2 分别为同一平面内两直线 l_1 和 l_2 上的三点，则

$L=B_1C_2\times C_1B_2$，$M=C_1A_2\times A_1C_2$，$N=A_1B_2\times B_1A_2$

共线（如图 5.2）.

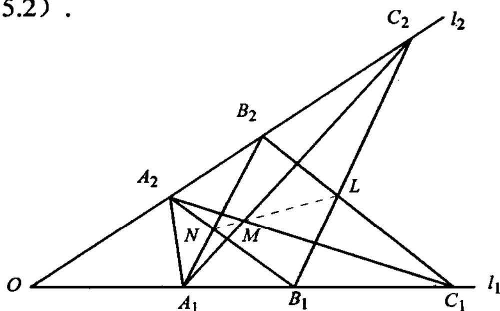


图 5.2

证明 二维射影坐标系取为 $\{A_1,\ B_1,\ A_2;\ B_2\}$，则各点的坐标可设为

$$A_1(1,\ 0,\ 0)、B_1(0,\ 1,\ 0)、C_1(1,\ n_1,\ 0),$$

$$A_2(0,\ 0,\ 1)、B_2(1,\ 1,\ 1)、C_2(1,\ 1,\ n_2).$$

于是连线 A_1B_2 和 B_1A_2 的方程为

$$A_1B_2:\ x_2-x_3=0,\quad B_1A_2:\ x_1=0,$$

它们的交点是 $A_1B_2\times B_1A_2=N(0,\ 1,\ 1)$.

连线 C_1A_2 和 A_1C_2 的方程为

$$C_1A_2:\ n_1x_1-x_2=0,\quad A_1C_2:\ n_2x_2-x_3=0,$$

它们的交点是 $C_1A_2\times A_1C_2=M(1,\ n_1,\ n_1n_2)$.

同理求得 $B_1C_2 \times C_1B_2 = L(1, n_1+n_2-n_1n_2, n_2)$.

由于

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & n_1 & n_1n_2 \\ 1 & n_1+n_2-n_1n_2 & n_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & n_1 & n_1n_2 \\ 0 & n_2(1-n_1) & n_2(1-n_1) \end{vmatrix}$$

$$= n_2(1-n_1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & n_1 & n_1n_2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

所以坐标矢量 $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$ 线性相关，即 L，M，N 共线.

3．特例：

（1）仿射坐标　如图 5.3，在射影坐标系｛A_1，A_2，A_3；E｝中取$\triangle A_1A_2A_3$ 的 A_1A_2 边为 l_∞，取 A_3 为原点 O，则点 P 的齐次坐标为

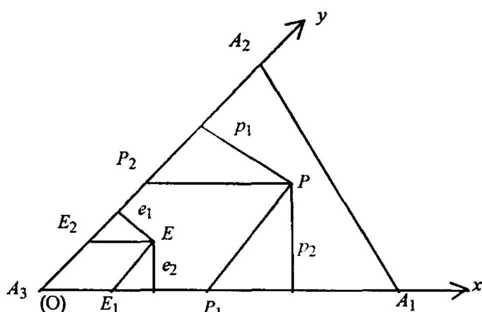


图 5.3

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{p_1}{e_1} : \frac{p_2}{e_2} : \frac{p_3}{e_3} = \frac{p_1}{e_1} : \frac{p_2}{e_2} : 1,$$ 非齐次坐标为

$$x = x_1 : x_3 = p_1 : e_1 = OP_1 : OE_1,$$

$$y = x_2 : x_3 = p_2 : e_2 = OP_2 : OE_2.$$

即点 P 的射影坐标特殊为以 A_3 为原点 O，以 A_3A_1、A_3A_2 为 x、y 轴的仿射坐标.

（2）笛氏坐标

仿射坐标（1）中再取 $E_1O=E_2O=1$，则

$$x=OP_1,\quad y=OP_2.$$

即点 P 的射影坐标特殊为笛氏坐标.

§5.2　射影变换

同一个点在不同坐标系下的坐标之间的关系称为**坐标转换**；而同一个坐标系下不同点的坐标之间的关系称为点**变换**.下面分别讨论坐标转换与射影变换.

一、坐标转换

1．笛氏坐标与射影坐标

设在射影坐标系｛A_1，A_2，A_3；E｝中，$\triangle A_1A_2A_3$ 的三边 A_2A_3、A_3A_1、A_1A_2 在笛氏坐标系下的方程为 $a_1x+b_1y+c_1=0$、$a_2x+b_2y+c_2=0$、$a_3x+b_3y+c_3=0$. 平面内任意一点 P 的非齐次笛氏坐标为 P（x，y），P 到$\triangle A_1A_2A_3$ 三边的有向距离为

$$p_i=\frac{a_ix+b_iy+c_i}{\pm\sqrt{a_i^2+b_i^2}}(i=1,2,3).$$

P 的齐次射影坐标为 P（x_1,x_2,x_3），P 到$\triangle A_1A_2A_3$ 三边的有向距离为

e_1，e_2，e_3，则

$$\lambda x_i=\frac{p_i}{e_i}=\frac{a_ix+b_iy+c_i}{\pm e_i\sqrt{a_i^2+b_i^2}},\text{取}k_i=\frac{1}{\pm e_i\sqrt{a_i^2+b_i^2}}(i=1,2,3).$$

所以

$$\begin{cases}\lambda x_1=k_1(a_1x+b_1y+c_1)\\ \lambda x_2=k_2(a_2x+b_2y+c_2)\\ \lambda x_3=k_3(a_3x+b_3y+c_3)\end{cases}\text{且}\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

取 $\alpha_i=k_ia_i,\beta_i=k_ib_i,\gamma_i=k_ic_i(i=1,2,3)$. 于是

$$(1)\quad \begin{cases} \lambda x_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1, \\ \lambda x_2 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2, \\ \lambda x_3 = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3. \end{cases}$$

且 $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = k_1 k_2 k_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$

若 P 的齐次笛氏坐标为 P（x，y，t），则

$$(2)\quad \begin{cases} \sigma x_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 t \\ \sigma x_2 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 t \\ \sigma x_3 = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 t \end{cases} \text{且} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

（1）为齐次射影坐标与非齐次笛氏坐标之间的关系，（2）为齐次射影坐标与齐次笛氏坐标之间的关系，且其逆变换存在.

2．射影坐标与射影坐标

设平面内一点 P 在两个射影坐标系｛A_1，A_2，A_3；E｝和｛A_1'，A_2'，A_3'；E'｝中的齐次射影坐标为（x_1, x_2, x_3），（x_1', x_2', x_3'），P 的齐次笛氏坐标为（x，y，t），则

$$\begin{cases} \sigma' x_1' = \alpha_1' x + \beta_1' y + \gamma_1' t \\ \sigma' x_2' = \alpha_2' x + \beta_2' y + \gamma_2' t \\ \sigma' x_3' = \alpha_3' x + \beta_3' y + \gamma_3' t \end{cases} \text{且} \begin{vmatrix} \alpha_1' & \beta_1' & \gamma_1' \\ \alpha_2' & \beta_2' & \gamma_2' \\ \alpha_3' & \beta_3' & \gamma_3' \end{vmatrix} \neq 0.$$

由（2）解出 x，y，t，代入上式得

$$(3)\quad \begin{cases} \rho x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ \rho x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ \rho x_3' = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{cases} \text{且} |A| = |a_{ij}| \neq 0.$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \rho \neq 0.$$

（3）可以缩写为

$$\rho x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \, (i = 1,2,3), \left|A\right| \neq 0.$$

或

$$\rho\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \left|A\right| \neq 0.$$

其逆变换一定存在（A_{ij} 为 $|A|$中 a_{ij} 的代数余子式）：

$$(4) \quad \begin{cases} \delta x_1 = A_{11} x_1' + A_{21} x_2' + A_{31} x_3' \\ \delta x_2 = A_{12} x_1' + A_{22} x_2' + A_{32} x_3' \text{且} \left|A_{ij}\right| = \left|a_{ij}\right|^2 \neq 0. \\ \delta x_3 = A_{13} x_1' + A_{23} x_2' + A_{33} x_3' \end{cases}$$

即

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ji} x_j' (i = 1,2,3), \left|A_{ij}\right| \neq 0.$$

或

$$\delta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}, \quad \left|A^{-1}\right| \neq 0.$$

二、射影变换

1．定义：

将表达式

$$\rho x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \, (i = 1,2,3), \left|a_{ij}\right| \neq 0. \qquad ①$$

或

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ji} x_j' (i = 1,2,3), \left|A_{ji}\right| \neq 0. \qquad ②$$

理解为同一点 P 在不同射影坐标系 ｛A_1，A_2，A_3；E｝和｛A_1'，A_2'，A_3'；E'｝下的坐标：（x_1, x_2, x_3）与（x_1', x_2', x_3'）之间的

关系时称为**坐标变换**(如图 5.4).

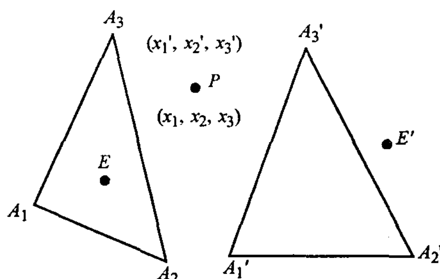


图 5.4

将上式理解为同一射影坐标系 { A_1, A_2, A_3; E } 下，不同点 P 和 P' 的坐标：(x_1, x_2, x_3) 与 (x_1', x_2', x_3') 之间的关系时称为**点变换**(如图 5.5).

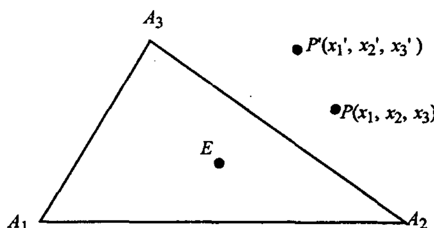


图 5.5

把（二维）射影坐标系下的点变换称为（二维）**射影变换**，①和②是射影变换的表达式.

2．性质：

由①知射影变换使原象点 P 变为映象点 P'，由②知射影变换使映象点 P' 变为原象点 P，所以 $|A|=|a_{ij}|\neq 0$ 的非奇射影变换使点与点一一对应，下面讨论射影变换关于直线的变换规律.

设定直线的坐标为（u_1, u_2, u_3），即

$$u_1 x_1+u_2 x_2+u_3 x_3=0,$$

此直线经射影变换后，由②可得

$$u_1(A_{11}x_1'+A_{21}x_2'+A_{31}x_3')+u_2(A_{12}x_1'+A_{22}x_2'+A_{32}x_3')$$
$$+u_3(A_{13}x_1'+A_{23}x_2'+A_{33}x_3')=0,$$

整理得

$$u_1'x_1'+u_2'x_2'+u_3'x_3'=0.$$

此方程表示的仍为直线，坐标为（u_1',u_2',u_3'），且有

$$\begin{cases}\tau u_1'=A_{11}u_1+A_{12}u_2+A_{13}u_3\\ \tau u_2'=A_{21}u_1+A_{22}u_2+A_{23}u_3,\left|A_{ij}\right|\neq 0.\\ \tau u_3'=A_{31}u_1+A_{32}u_2+A_{33}u_3\end{cases}$$

或
$$\tau u_i'=\sum_{j=1}^{3}A_{ij}u_j(i=1,2,3),\left|A_{ij}\right|\neq 0. \quad ③$$

其逆变换一定存在，可推得

$$\begin{cases}\sigma u_1=a_{11}u_1'+a_{21}u_2'+a_{31}u_3'\\ \sigma u_2=a_{12}u_1'+a_{22}u_2'+a_{32}u_3',\left|a_{ji}\right|\neq 0.\\ \sigma u_3=a_{13}u_1'+a_{23}u_2'+a_{33}u_3'\end{cases}$$

或
$$\sigma u_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ji}u_j(i=1,2,3),\left|a_{ji}\right|\neq 0. \quad ④$$

③和④也是射影变换的表达式，它使直线与直线一一对应.

三、二维射影几何的基本定理

定理 5.1 平面内的四对对应点（无三点共线）决定唯一（二维）射影变换（对偶定理也成立）.

证明 （1）先来证明（二维）射影坐标系中，使坐标三角形的顶点（1，0，0）、（0，1，0）、（0，0，1）和单位点（1，1，1）分别变为无三点共线的四点 P_1（$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$）、$P_2$（$\beta_1,\beta_2,\beta_3$）、$P_3$（$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$）、$P_4$（$\delta_1,\delta_2,\delta_3$）的射影变换①唯一存在：

在射影变换①中代入以上四对对应点的坐标可得 12 个方程

$$\begin{cases} a_{11}=\rho_1\alpha_1, a_{12}=\rho_2\beta_1, a_{13}=\rho_3\gamma_1, \\ a_{21}=\rho_1\alpha_2, a_{22}=\rho_2\beta_2, a_{23}\rho_3\gamma_2, \\ a_{31}=\rho_1\alpha_3, a_{32}=\rho_2\beta_3, a_{33}=\rho_3\gamma_3, \\ a_{11}+a_{12}+a_{13}=\rho_4\delta_1, \\ a_{21}+a_{22}+a_{23}=\rho_4\delta_2, \\ a_{31}+a_{32}+a_{33}=\rho_4\delta_3. \end{cases}$$

于是可得非 0 参数 $\rho_i(i=1,2,3,4)$ 的关系

$$\begin{cases} \rho_1\alpha_1+\rho_2\beta_1+\rho_3\gamma_1-\rho_4\delta_1=0, \\ \rho_1\alpha_2+\rho_2\beta_2+\rho_3\gamma_2-\rho_4\delta_2=0, \\ \rho_1\alpha_3+\rho_2\beta_3+\rho_3\gamma_3-\rho_4\delta_3=0. \end{cases}$$

从而

$$\frac{\rho_1}{|\delta\beta\gamma|}=\frac{\rho_2}{|\alpha\delta\gamma|}=\frac{\rho_3}{|\alpha\beta\delta|}=\frac{\rho_4}{|\alpha\beta\gamma|}=k.$$

其中行列式

$$|\delta\beta\gamma|=\begin{vmatrix} \delta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \delta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \delta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}\neq 0, \quad \cdots \quad .$$

则

$$\rho_1=k|\delta\beta\gamma|, \rho_2=k|\alpha\delta\gamma|, \rho_3=k|\alpha\beta\delta|, \rho_4=k|\alpha\beta\gamma|.$$

令 $\rho'=\rho/k$ 并代入①可得

$$\begin{cases} \rho' x_1'=\alpha_1|\delta\beta\gamma|x_1+\beta_1|\alpha\delta\gamma|x_2+\gamma_1|\alpha\beta\delta|x_3, \\ \rho' x_2'=\alpha_2|\delta\beta\gamma|x_1+\beta_2|\alpha\delta\gamma|x_2+\gamma_2|\alpha\beta\delta|x_3, \\ \rho' x_3'=\alpha_3|\delta\beta\gamma|x_1+\beta_3|\alpha\delta\gamma|x_2+\gamma_3|\alpha\beta\delta|x_3. \end{cases}$$

且 $\quad |a_{ij}|=\rho_1\rho_2\rho_3|\alpha\beta\gamma|=\frac{1}{k}\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4\neq 0.$

所以，以上四对对应点决定的射影变换①唯一存在.

（2）再来证明平面内任意四点 P_1、P_2、P_3、P_4（无三点共线）与另四点 P_1'、P_2'、P_3'、P_4'（无三点共线）之间存在唯一射影变换 T 使 T（P_1、P_2、P_3、P_4）=（P_1'、P_2'、P_3'、P_4'）:

由（1）知存在射影变换 T_1、T_2 使

$$T_1（A_1、A_2、A_3、E）=（P_1、P_2、P_3、P_4），$$

$$T_2（A_1、A_2、A_3、E）=（P_1'、P_2'、P_3'、P_4'），$$

且 T_1、T_2 的逆变换存在.令 $T=T_2T_1^{-1}$，则

$$T（P_1、P_2、P_3、P_4）=T_2T_1^{-1}（P_1、P_2、P_3、P_4）$$

$$=T_2（A_1、A_2、A_3、E）=（P_1'、P_2'、P_3'、P_4'）.$$

所以射影变换 T 是存在的.若还存在射影变换 T' 使

$$T'（P_1、P_2、P_3、P_4）=（P_1'、P_2'、P_3'、P_4'）$$

则

$$T'T_1（A_1、A_2、A_3、E）=T'（P_1、P_2、P_3、P_4）$$

$$=（P_1'、P_2'、P_3'、P_4'），$$

由（1）得

$$T'T_1=T_2,$$

所以

$$T'=T_2T_1^{-1}=T.$$

推论 保留平面上四点（无三点共线）不变的射影变换一定是单位变换（幺变换）I：

$$\begin{cases}\rho x_1'=x_1,\\ \rho x_2'=x_2,\\ \rho x_3'=x_3.\end{cases}$$

定理 5.2 射影变换使点列与对应点列成射影影对应，即交比是（二维）射影变换的不变量.

证明 在一点列中取四点：

$$y(y_1,y_2,y_3),z(z_1,z_2,z_3),y+\lambda_1 z,y+\lambda_2 z.$$

射影变换为

$$T:\quad \rho x_i'=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_j\,(i=1,2,3),\left|a_{ij}\right|\neq 0.$$

设 $T（y,z）=（y',z'）$，则

$$\rho_1 y' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} y_j, \rho_2 z' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} z_j.$$

于是

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}(y_j + \lambda_n z_j) = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} y_j + \lambda_n \sum_{j=1}^{3} a_{ij} z_j = \rho_1 y' + \lambda_n \rho_2 z' (n = 1,2).$$

所以

$$T(y + \lambda_1 z) = y' + \lambda_1 z', T(y + \lambda_2 z) = y' + \lambda_2 z'.$$

即

$$(y, z, y + \lambda_1 z, y + \lambda_2 z) = (y', z', y' + \lambda_1 z', y' + \lambda_2 z') = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

因此，射影变换使点列与对应点列成射影影对应，即交比是（二维）射影变换的不变量.

§5.3 射影变换的二重元素

一、定义

经过一个射影变换不变(即变为自身)的元素称为此射影变换的二重元素，或固定元素，或不变元素.

二重元素有二重点和二重直线两种，下面给出它的求法.

二、求法

设射影变换 T 的二重点为 y（y_1，y_2，y_3），且 T（y）$=y'$（y_1'，y_2'，y_3'），二重直线为 u（u_1，u_2，u_3）且 T（u）$=u'$（u_1'，u_2'，u_3'），则

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{y_2'}{y_2} = \frac{y_3'}{y_3} = k,$$

代入 T 的表达式①得

$$\begin{cases} \rho k y_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 \\ \rho k y_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3, \\ \rho k y_3 = a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3 \end{cases}$$

令 $\rho k = \alpha$，即

$$\begin{cases} (a_{11} - \alpha)\ y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 = 0 \\ a_{21} y_1 + (a_{22} - \alpha)\ y_2 + a_{23} y_3 = 0. \\ a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + (a_{33} - \alpha)\ y_3 = 0 \end{cases}$$

由于 y_1，y_2，y_3 不全为 0，所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \alpha & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \alpha & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

由上式求得 α 就能得二重点.

同样，设射影变换 T 的二重直线为 u（u_1，u_2，u_3），且 T（u）$=u'$（u_1'，u_2'，u_3'），则

$$\frac{u_1'}{u_1} = \frac{u_2'}{u_2} = \frac{u_3'}{u_3} = k'.$$

代入 T 的表达式④得

$$\begin{cases} \sigma u_1 = k'(a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + a_{31} u_3) \\ \sigma u_2 = k'(a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + a_{32} u_3), \\ \sigma u_3 = k'(a_{13} u_1 + a_{23} u_2 + a_{33} u_3) \end{cases}$$

令 $\frac{\sigma}{k'} = \beta$，即

$$\begin{cases} (a_{11} - \beta)\ u_1 + a_{21} u_2 + a_{31} u_3 = 0 \\ a_{12} u_1 + (a_{22} - \beta)\ u_2 + a_{32} u_3 = 0. \\ a_{13} u_1 + a_{23} u_2 + (a_{33} - \beta)\ u_3 = 0 \end{cases}$$

由于 u_1，u_2，u_3 不全为 0，所以

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\beta & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22}-\beta & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\beta \end{vmatrix}=0.$$

由上式求得 β 就能得二重直线.

综上所述，**求射影变换二重元素的步骤是**：

（1）由射影变换的特征方程

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

求射影变换的特征根 λ；

（2）将射影变换的特征根 λ 代入方程

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\ x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0 \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)\ x_2+a_{23}x_3=0. \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+(a_{33}-\lambda)\ x_3=0 \end{cases}$$

求射影变换的二重点（x_1，x_2，x_3）；

（3）将射影变换的特征根 λ 代入方程

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\ u_1+a_{21}u_2+a_{31}u_3=0 \\ a_{12}u_1+(a_{22}-\lambda)\ u_2+a_{32}u_3=0. \\ a_{13}u_1+a_{23}u_2+(a_{33}-\lambda)\ u_3=0 \end{cases}$$

求射影变换的二重直线（u_1，u_2，u_3）.

例 5.2　求射影变换

$$\begin{cases} \rho x_1'=-x_1 \\ \rho x_2'=x_2 \\ \rho x_3'=x_3 \end{cases}$$

的二重元素.

解　（1）求特征根

由

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

得 $-(1+\lambda)(1-\lambda)^2=0$, 即 $\lambda_1=-1, \lambda_2=1$(二重根).

（2）求二重点

将特征根 $\lambda_1=-1, \lambda_2=1$ 分别代入方程组

$$\begin{cases} (-1-\lambda)\ x_1=0 \\ (1-\lambda)\ x_2=0 \\ (1-\lambda)\ x_3=0 \end{cases}$$

得二重点为（1，0，0）（即 A_1 点）和（0，x_2，x_3）（即 A_2A_3 边上的所有点）.

（3）求二重直线

将特征根 $\lambda_1=-1, \lambda_2=1$ 分别代入方程组

$$\begin{cases} (-1-\lambda)\ u_1=0 \\ (1-\lambda)\ u_2=0 \\ (1-\lambda)\ u_3=0 \end{cases}$$

得二重直线为（1，0，0）（即 A_2A_3 边）和（0，u_2，u_3）（即过 A_1 点的所有直线）.

三、射影变换的特例

1．仿射变换：

若射影变换 T: $\begin{cases} \rho x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ \rho x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3, \\ \rho x_3'=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{cases}$ $|a_{ij}|\neq 0$.

保持直线 $x_3=0$ 不变（并非此直线上的每一点都不变），则对任意的 x_1，x_2（不全为 0），当 $x_3=0$ 时都有 $x_3'=0$，即 T 的表达式中

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2\equiv 0,$$

于是 $a_{31}=a_{32}=0$. 所以 T 的表达式变为

$$\begin{cases}\rho x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ \rho x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3, a_{33}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0.\\ \rho x_3'=\qquad\qquad a_{33}x_3\end{cases}$$

令

$$\alpha_1=\frac{a_{11}}{a_{33}},\alpha_2=\frac{a_{12}}{a_{33}},\alpha_0=\frac{a_{13}}{a_{33}};\beta_1=\frac{a_{21}}{a_{33}},\beta_2=\frac{a_{22}}{a_{33}},\beta_0=\frac{a_{23}}{a_{33}}.$$

则上式化为非齐次表达式

$$\begin{cases}x'=\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_0\\ y'=\beta_1x+\beta_2y+\beta_0\end{cases},\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_2\\\beta_1&\beta_2\end{vmatrix}\neq 0.$$

此式为仿射变换的表达式，因此，仿射变换是保持 l_∞ 不变的射影变换.

2.（正）相似变换：

若射影变换 T（仿射变换）

$$\begin{cases}\rho x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ \rho x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3, a_{33}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0.\\ \rho x_3'=\qquad\qquad a_{33}x_3\end{cases}$$

以 l_∞ 上的两点 $I(1,i,0),J(1,-i,0)$ 为二重点，代入上式得

$$\begin{cases}\rho_1=a_{11}+ia_{12}\\ i\rho_1=a_{21}+ia_{22}\end{cases},\begin{cases}\rho_2=a_{11}-ia_{12}\\ -i\rho_2=a_{21}-ia_{22}\end{cases}.$$

即 $a_{11}=a_{22},a_{12}=-a_{21}$. 令

$$\alpha=\frac{a_{11}}{a_{33}}=\frac{a_{22}}{a_{33}},\beta=\frac{a_{21}}{a_{33}}=-\frac{a_{12}}{a_{33}},h=\frac{a_{13}}{a_{33}},k=\frac{a_{23}}{a_{33}}.$$

则 T 的非齐次表达式化为

$$\begin{cases}x'=\alpha x-\beta y+h\\ y'=\beta x+\alpha y+k\end{cases},\begin{vmatrix}\alpha&-\beta\\\beta&\alpha\end{vmatrix}=\alpha^2+\beta^2\succ 0.$$

此式称为正相似变换.

3．运动变换：

在正相似变换中，若系数行列式

$$\begin{vmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + \beta^2 = 1,$$

则可取

$$\alpha = \cos\theta, \beta = \sin\theta.$$

于是正相似变换的表达式化为

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + h, \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + k, \end{cases} \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

此式称为运动变换（即旋转与平移的合成）.

§ 5.4 变换群与几何学

一、变换群的定义

因为变换一定满足结合律，且一定存在单位元即恒等变换，所以，由抽象群的概念可改写成如下变换群的定义：

若变换的集合 G 满足下列二条件：（1）$T_1, T_2 \in G \Rightarrow T_2 \cdot T_1 \in G$，（2）$\forall T \in G \Rightarrow \exists T^{-1} \in G$. 则称 G 构成一个变换群.

例 5. 3 证明直线上的一维射影变换：T_1（$x'=x$），T_2（$x'=1/x$），T_3（$x'=1-x$），T_4（$x'=1/(1-x)$），T_5（$x'=x/(x-1)$），T_6（$x'=(x-1)/x$）的集合构成变换群（交比群）.

证明 设集合 $G=\{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$，则

（1）对任意 T_i，$T_j \in G$，由下表知 $T_iT_j \in G$：

(T_iT_j)	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6 (**T_i**)
T_1	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
T_2	T_2	T_1	T_6	T_5	T_4	T_3
T_3	T_3	T_4	T_1	T_2	T_6	T_5
T_4	T_4	T_3	T_5	T_6	T_2	T_1
T_5	T_5	T_6	T_4	T_3	T_1	T_2
T_6(**T_j**)	T_6	T_5	T_2	T_1	T_3	T_4

（2）对任意 $T_i \in G$，有对任意 $T_i^{-1} \in G$：

$T_1^{-1}=T_1$，$T_2^{-1}=T_2$，$T_3^{-1}=T_3$，$T_4^{-1}=T_6$，$T_5^{-1}=T_5$，$T_6^{-1}=T_4$.

由（1），（2）得 G 构成变换群.

二、几个重要的变换群

1.射影群：

定理 5.3 射影平面上一切射影变换的集合 K 构成群，简称射影群.

证明 （1）设 T_1，$T_2 \in K$，且 $T_1(x)=x'$，$T_2(x')=x''$，则

$$T_1:\rho\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},A=(a_{ij})(i,j=1,2,3),|A|\neq 0,$$

$$T_2:\rho'\begin{pmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix},B=(b_{ki})(k,i=1,2,3),|B|\neq 0.$$

所以

$$\rho\rho'\begin{pmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\end{pmatrix}=B\rho\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=BA\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

即（令 $\lambda=\rho\rho'$）

$$T_2T_1:\lambda\begin{pmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\ C=(c_{kj})(k,j=1,2,3),|C|=|A||B|\neq 0.$$

因此

$$T_2T_1\in K.$$

（2）设 $T\in K$，即

$$T:\rho\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},|A|\neq 0,$$

则

$$T^{-1}:\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix},\left|A^{-1}\right|=|A|^2\neq 0,$$

所以

$$T^1\in K.$$

由（1），（2）知 K 构成群，且 K 的每一个变换都由 8 个独立参数决定，所以称为 8 维群.

同理可得

2.仿射群：

定理 5.4 仿射平面上一切仿射变换的集合 A 构成群，简称仿射群（6 维群）.

3.运动群：

定理 5.5 欧氏平面上一切运动变换的集合 M 构成群，简称运动群（3 维群）.

显然，运动群⊂仿射群⊂射影群，即 $M\subset A\subset K$.

三、变换群与几何学

1. 几何学的群论原则

德国数学家克莱因（F.klein）于 1872 年提出的“艾尔兰根纲领”中把变换群与几何学联系起来了，其思想概括如下：

设给定一个集合为 F，F 中元素间的一个变换群为 G，把集合 F 叫做空间，集合 F 的元素叫做空间的点，集合 F 的子集叫做空间的图形，于是空间 F 内所有图形对于变换群 G 的一切不变性和不变量的命题系统组成相应的几何学.

2. 几何学的关系

设集合 S 的一个变换群 G_a 及其子群 G_b，对应的几何学分别是 A 和 B，由于 $G_b \subset G_a$，则对于 G_a 不变的性质对于 G_b 必然不变，所以 A 中的定理一定是 B 中的定理，反过来，B 中的定理未必是 A 中的定理. 因此，几何学 B 叫做几何学 A 的子几何（$B \subset A$），显然子几何 B 比原几何 A 有更丰富的内容（内涵与外延的关系）.

3. 几个重要的几何学

根据几何学的群论原则，可得以下三种重要几何学：

关于射影群 K 下图形的不变性与不变量（如同素性，接合性，交比等）的研究构成**射影几何学**.

关于仿射群 A 下图形的不变性与不变量（如同素性，接合性，平行性，简比等）的研究构成**仿射几何学**.

关于运动群 M 下图形的不变性与不变量（如同素性，接合性，平行性，垂直性，距离等）的研究构成**度量几何学**或**欧氏几何学**.

欧氏几何学为仿射几何学的子几何，仿射几何学为射影几何学的子几何.因此，欧氏几何中可以讨论仿射几何和射影几何的对象，仿射几何中可以讨论射影几何的对象，而射影几何中不能讨论仿射与欧氏的对象，仿射几何中也不能讨论欧氏的对象.

即就讨论的内容而言，有如下关系：

$$\text{射影几何} \subset \text{仿射几何} \subset \text{欧氏几何}.$$

为了更清楚地说明三种重要几何学的关系，可列表如下：

名　称	射影几何	仿射几何	欧氏几何
对应变换群	射影群 K	仿射群 A	运动群 M
对应变换式	$\rho x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j$ $(i=1,2,3), \lvert a_{ij} \rvert \neq 0$	$\begin{cases} x' = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_0 \\ y' = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_0 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$	$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + h \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + k \end{cases}$ $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1$
维　数	8	6	3

基本不变性	接合性	左面内容 平行性	左面内容 垂直性
基本不变量	交比	左面内容 简比	左面内容 距离、角度
基本不变 图形	——	无穷远直线	左面内容 线段（长度）

习题五

1. 在直线上取笛氏坐标是 2，0，3 的点为射影坐标系的 A_1，A_2，E，求此直线上任意点 P 的笛氏坐标 x 与射影坐标 λ 之间的关系.

2. 在二维射影坐标系 $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ 下，求 A_1E，A_2E，A_3E 的方程和坐标.

3. 在二维射影坐标系 $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ 中，分别写出过点 A_1，A_2 和 A_3 的直线方程.

4. 在平面上取笛氏坐标系下的三直线 x-y=0，x+y-1=0，x-2=0 为射影坐标系 $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ 中坐标三角形的边 A_2A_3 ，A_3A_1，A_1A_2，并取点（3/2，1/2）为单位点 E，求此平面上任意点 P 的笛氏坐标(x，y，t)与射影坐标(x_1，x_2，x_3)之间的关系.

5. 已知坐标变换为

$$\begin{cases} \rho x_1' = -x_1 + x_2 + x_3, \\ \rho x_2' = x_1 - x_2 + x_3, \\ \rho x_3' = x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$$

求射影坐标系 $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ 中坐标三角形的三边在射影坐标系 $\{A_1', A_2', A_3'; E'\}$ 中的方程.

6. 求射影变换，使点 P_1（1，0，1），P_2（0，1，1），P_3（1，1，1）和 P_4（0，0，1）变为 A_1，A_2，A_3和 E .

7. 求射影变换

$$\begin{cases}\rho x_1'=x_1+x_2\\ \rho x_2'=\quad x_2\\ \rho x_3'=\quad\quad x_3\end{cases}$$

的二重元素.

8. 求射影变换

$$\begin{cases}\rho x_1'=4x_1-x_2\\ \rho x_2'=6x_1-3x_2\\ \rho x_3'=x_1-x_2-x_3\end{cases}$$

的二重元素.

9. 求证：欧氏平面上一切平移变换的集合构成变换群.

10. 求证：欧氏平面上一切绕坐标原点的旋转变换的集合构成变换群.

11. 讨论矢量的哪些概念是欧氏几何的内容？哪些概念是仿射几何的内容？

12. 讨论下列概念、图形或性质是哪种几何（最大的）的讨论对象？

（1）线段长度　（2）两直线的交角　（3）梯形
（4）三角形的重心　（5）完全四点形　（6）调和点列
（7）三角形的面积　（8）共点线或共线点　（9）垂直
（10）平行四边形的对角线互相平分　（11）面积相等
（12）点列与线束　（13）平行线段的比　（14）绕点的旋转.

第六章　射影理论在二次曲线中的应用

前面已经给出了射影坐标与射影变换的概念，在本章利用射影几何的理论来研究二次曲线的性质即射影性质.主要内容有二次曲线的射影定义，帕斯卡(Pascal)定理，二次曲线的配极理论及射影分类等.

本章的知识结构为

二次曲线的定义 $\rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{笛氏定义}\\ \text{射影定义}\end{matrix}\right\}\rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{二阶曲线}\\ \text{二级曲线}\end{matrix}\right\}$,

$\Rightarrow$ 重要定理 $\rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{帕斯卡定理}\\ \text{布利安双定理}\end{matrix}\right\}\rightarrow$ 特例,

$\Rightarrow$ 二次曲线的配极理论 $\rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{极点}\\ \text{极线}\end{matrix}\right\}\rightarrow$ 配极变换，

$\Rightarrow$ 二次曲线的射影分类 .

§6.1　二次曲线的定义

一、笛氏定义

定义 6.1　满足方程

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j = 0(a_{ij} = a_{ji})$$

的全体点（x_1, x_2, x_3）的轨迹叫做二阶曲线.当系数行列式$\left|a_{ij}\right| \neq 0$时称为非退化的二阶曲线，否则称为退化的二阶曲线.

定义 6.1′　满足方程

$$\sum_{i,j=1}^{3} a'_{ij} u_i u_j = 0 (a'_{ij} = a'_{ji})$$

的全体直线（u_1，u_2，u_3）的轨迹叫做二级曲线.当$|a'_{ij}| \neq 0$时称为非退化的二级曲线，否则称为退化的二级曲线.

二阶曲线与二级曲线统称为二次曲线.

定理 6.1 两个不共心的射影线束的对应线交点的全体连同这两个中心构成一条二阶曲线.

定理 6.1′ 两个不共底的射影点列的对应点连线的全体连同这两个底线构成一条二级曲线.

以上两个对偶定理只需证明其中一个（如定理 6.1）:

证明 在平面笛氏（或射影）坐标系中，设两个线束方程为

$$A + \lambda B = 0, A' + \lambda' B' = 0.$$

其中 A、B、A' 、B' 表示关于 x_1，x_2，x_3 的一次齐次式，如

$$A = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, \cdots .$$

由于两个线束是射影对应的，则

$$a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0 (ad - bc \neq 0).$$

将 $\lambda = -A/B, \lambda' = -A'/B'$ 代入上式得

$$aAA' + dBB' - bAB' - cA'B = 0.$$

因为 A、B、A' 、B' 表示关于 x_1，x_2，x_3 的一次齐次式，所以上式表示关于 x_1，x_2，x_3 的二次齐次方程，且 A=0、B=0 的交点和 A' =0、B' =0 的交点都满足此方程. 由定义 1 可得此方程表示一条二阶曲线且两个线束的中心也在曲线上.

构成二阶曲线的两个线束的中心并无特殊性，与曲线上其它点的地位是平等的，由下面定理来说明:

定理 6.2 设两线束（如图 6.1）

$$O\{P\} \overline{\wedge} O'\{P\},$$

对应线的交点 P（连同两中心 O 与 O' ）的轨迹是一条二阶曲线Γ，定点 A、$B \in \Gamma$，任意动点 $M \in \Gamma$，则 $A\{M\} \overline{\wedge} B\{M\}$.

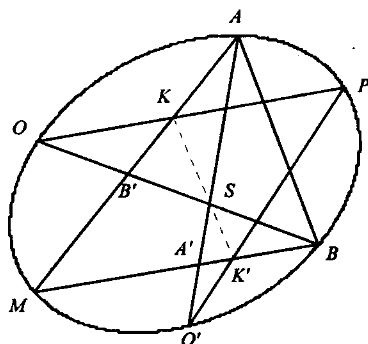


图 6.1

定理 6.2′ 设一条二级曲线是由两射影点列中对应点的连线构成的；二级曲线上的定直线为 a，b，任意动直线为 m，则两点列 $a\{m\}\overline{\wedge}b\{m\}$.

我们只证明定理 6.2.

证明 设 $OP\times AM=K$，$BM\times O'P=K'$，$O'A\times BM=A'$，$OB\times AM=B'$，$O'A\times OB=S$. 则

$$O(ABPM)\ \overline{\wedge}\ O'(ABPM),$$

所以

$$(AB'KM)\ \overline{\wedge}\ (A'BK'M),$$

又因为公共点自对应，故有

$$(AB'KM)\ \overline{\overline{\wedge}}\ (A'BK'M).$$

因此

$$K,\ K',\ S\text{ 共线}.$$

即

$$A\{M\}\overline{\overline{\wedge}}OP\{K\}\overline{\overline{\wedge}}O'P\{K'\}\overline{\overline{\wedge}}B\{M\},$$

从而

$$A\{M\}\overline{\wedge}B\{M\}.$$

推论 1 平面内无三点共线的五点唯一决定一条二阶曲线.

证明 设已知五点 O，O'，A，B，C（无三点共线）. 以其中任

意两点如 O，O' 为中心，即得连线 O（A，B，C）与 O'（A，B，C），由一维射影几何基本定理（定理 4.11）这三对对应直线唯一决定一个射影对应，从而这五点唯一决定一条二阶曲线（定理 6.1），且这条二阶曲线不因哪两点取为线束中心而改变（定理 6.2）.

推论 2 二阶曲线上任意一点与四定点连线所得线束的交比为常数.

证明 设二阶曲线上四定点为 A，B，C，D，第五点的任意两个位置是 O、O'. 取 O、O' 为两个射影线束的中心产生此二阶曲线，则

$$O(A, B, C, D) \overline{\wedge} O'(A, B, C, D),$$

从而

$$O(AB, CD) = O'(AB, CD).$$

即四连线的交比不因第五点的位置而改变，故为常数.

二、射影定义

定义 6.2 在射影平面上，两个射影线束中对应线交点的集合叫做二阶曲线. 当两个射影线束成透视对应时称为退化的二阶曲线，否则称为非退化的二阶曲线.

退化的二阶曲线变为两条直线，即对应线交点的连线（透视轴）与两个中心的连线(如图 6.2).

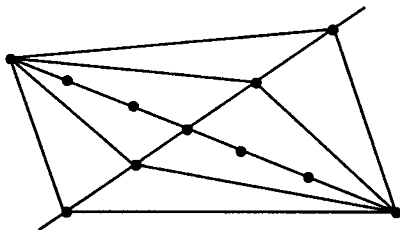


图 6.2

定义 6.2′ 在射影平面上，两个射影点列中对应点连线的集合

叫做二级曲线．当两个射影点列成透视对应时称为退化的二级曲线，否则称为非退化的二级曲线．

退化的二级曲线变为两个点，即对应点连线的交点（透视心）与两个底的交点(如图 6.3).

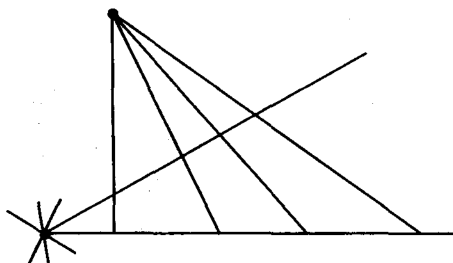


图 6.3

学习了§6.3 的配极理论就可以证明下面的结论：

定理 6.3 非退化二阶曲线的切线的集合是非退化的二级曲线.

定理 6.3′ 非退化二级曲线的切点的集合是非退化的二阶曲线.

§6.2 帕斯卡(Pascal)定理

一、定理

定理 6.4（帕斯卡定理） 内接于一条非退化二阶曲线的六角形，其三双对边的交点共线（帕斯卡线）.

定理 6.4′（布利安双定理） 外切于一条非退化二级曲线的六边形，其三双对顶的连线共点（布利安双点）.

证明（定理 6.4） 如图 6.4，1，2，3，4，5，6 是内接于非退化二阶曲线Γ的六角形的顶点，则三双对边的交点为

$$P=12\times45,\ Q=23\times56,\ R=34\times61.$$

由二阶曲线的射影定义，以Γ上两点 2，6 为中心可得

$$2\,(4351)\ \overline{\wedge}\ 6\,(4351),$$

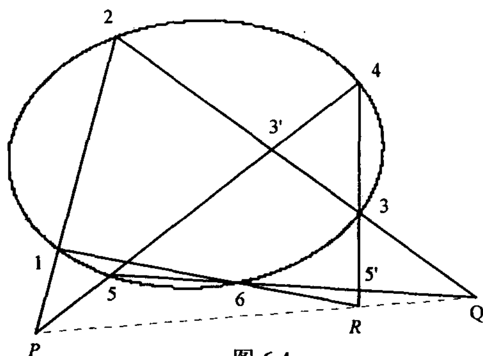


图 6.4

而

$$2\ (4351)\ \overset{=}{\wedge}\ 45\ (43'5P),\quad 6\ (4351)\ \overset{=}{\wedge}\ 34\ (435'R),$$

$$(3'=23\times 45,\ 5'=34\times 56)$$

所以

$$(43'5P)\ \overset{-}{\wedge}\ (435'R)$$

由于此射影对应中，公共点 4 自对应，从而

$$(43'5P)\ \overset{=}{\wedge}\ (435'R)$$

即对应点的连线 33′、55′、*PR* 共点，故 *P*、*Q*（33′×55′）、*R* 共线.

因为以上每一步都可逆推上去，所以定理 6.4 的逆定理成立.由对偶原理，定理 6.4′ 及其逆定理也成立.

二、定理的特殊情形

1. 当Γ为退化的二阶曲线（即两条直线），则帕斯卡定理变为巴卜斯定理（如图 6.5）.

2. 当Γ为非退化的二阶曲线，但六角形特殊为五角形，则得：内接于一条非退化二阶曲线的五角形，其一边与对顶

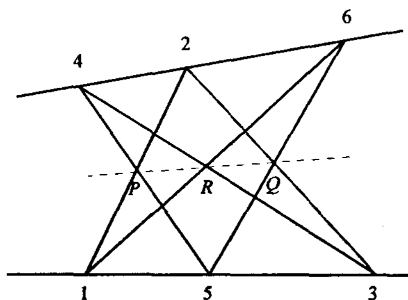


图 6.5

切线的交点和另两双对边的交点共线（如图 6.6）.

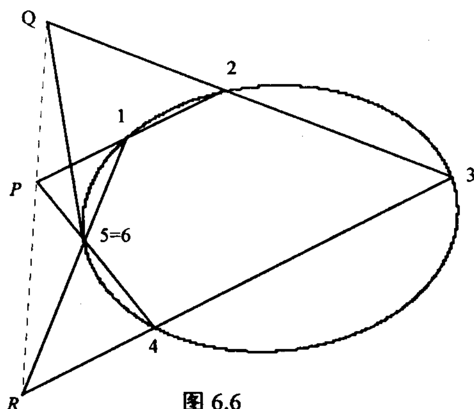


图 6.6

3.当Γ为非退化的二阶曲线，但六角形特殊为三角形，则得：内接于一条非退化二阶曲线的三角形，其三边分别与对顶切线的交点共线（如图 6.7）.

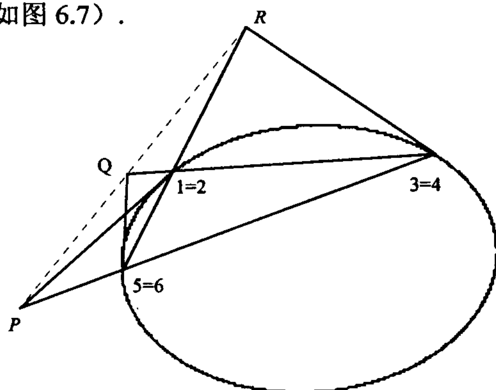


图 6.7

以上是帕斯卡定理的特殊情形，布利安双定理的特殊情形请读者用对偶的方法自己写出来.

例 6.1 已知二阶曲线上（无三点共线）的五点，如何作出其它的点？

解 设五点 1，2，3，4，5 在二阶曲线Γ上（如图 6.8），且 12 ×45=P. 过点 P 任作一直线 l，23×l=Q，34×l=R，5Q×1R=6，由帕斯卡定理的逆定理知，点 6 在Γ上，同理可作其它的点.

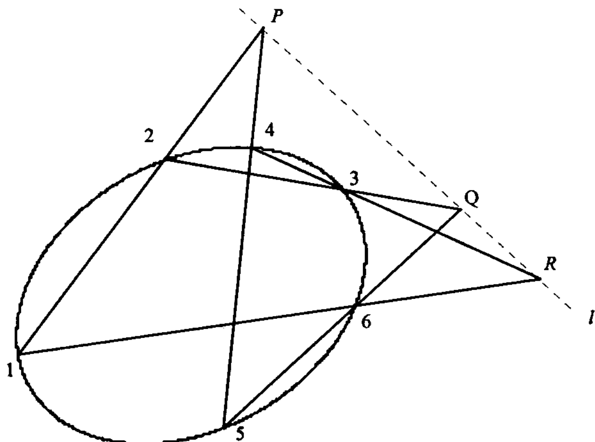


图 6.8

§6.3 二次曲线的配极理论

设二次曲线为Γ：$\sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j = 0(a_{ij} = a_{ji})$，$\left|a_{ij}\right| \neq 0$.即Γ为非退化的二阶曲线，对于二级曲线对偶可得，其结果完全一致.

一、极点与极线

1.概念：

定义 6.3 过Γ外取一点 y，作直线交Γ于 P_1、P_2，若直线 P_1P_2 上存在一点 z 使（$y\,z$，P_1P_2）= -1，则称 y、z 关于Γ共轭（如图 6.9）.

定理 6.5 不在Γ上的两点 y、z 关于Γ共轭的条件是

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} y_i z_j = 0 .$$

证明 两点 y、z 连线上的任意一点为 $y+\lambda z$，若此点在 Γ 上，则

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(y_i+\lambda z_i)(y_j+\lambda z_j)=0,$$

即

$$\lambda^2\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}z_iz_j+2\lambda\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}y_iz_j+\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}y_iy_j=0.$$

这是 λ 的一元二次方程，其根为 λ_1、λ_2，则 y、z 连线与 Γ 的交点为

$$P_1\ (y+\lambda_1 z),\quad P_2\ (y+\lambda_2 z)$$

于是

$$(yz,\ P_1P_2)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

两点 y、z 关于 Γ 共轭的条件是 $(yz,\ P_1P_2)=-1$ 或 $\lambda_1+\lambda_2=0$. 由二次方程根与系数的关系，y、z 关于 Γ 共轭的条件是

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}y_iz_j=0.$$

定理 6.6 一点 y 关于 Γ 所有共轭点的轨迹是一条直线，称为 y 关于 Γ 的**极线**，点 y 称为这条直线关于 Γ 的**极点**.

证明 点 y 称的坐标是定数（y_1，y_2，y_3），y 关于 Γ 的共轭点 z 的坐标是变数（x_1，x_2，x_3），由 Th6.5 知

$$(a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3)x_1+(a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3)x_2+(a_{31}y_1+a_{32}y_2+a_{33}y_3)x_3=0,$$

即

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0.$$

或

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

此方程表示一直线，即 y 的极线.

由此可知，直线（u_1，u_2，u_3）的极点（x_1，x_2，x_3）由方程

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \rho u_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \rho u_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \rho u_3 \end{cases}$$

求得.

2.性质：

定理 6.7（配极原则） 若点 y 的极线过点 z，则点 z 的极线过点 y.

证明 若点 y 的极线过点 z，则点 z 是点 y 的共轭点之一，即点 y 是点 z 的共轭点之一，所以点 z 的极线过点 y.

推论 1 若点 z 在点 y 的极线上移动，则点 z 的极线绕点 y 转动.

定理 6.8 若点 y 在自身的极线上，则称点 y 为 Γ 的自共轭点. 一点 y 为自共轭点的充要条件是 y 点在 Γ 上.

证明 点 y 关于 Γ：$\sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j = 0$ 的极线为 $\sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}y_i x_j = 0$.

若点 y 是自共轭点，则 $\sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}y_i y_j = 0$，即 y 点在 Γ 上.

若 y 点在 Γ 上，则 $\sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}y_i y_j = 0$，所以 y 在自身的极线上，即点 y 是自共轭点.

定理 6.9 若 y 点在 Γ 上，则点 y 关于 Γ 的极线就是 Γ 在 y 点处的切线.

证明 因为 y 点在 Γ 上，所以 $\sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}y_i y_j = 0$.设点 y 关于 Γ 的共轭点是 z，则 $\sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}y_i z_j = 0$.若 y、z 连线与 Γ 的交点为 $P_1(y+\lambda_1 z)$、P_2（$y+\lambda_2 z$），由于 λ_1、λ_2 是方程

$$\lambda^2 \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} z_i z_j + 2\lambda \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} y_i z_j + \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} y_i y_j = 0$$

即

$$\lambda^2 \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} z_i z_j + 2\lambda \cdot 0 + 0 = 0$$

的根，从而 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$，即 $P_1 \equiv P_2 \equiv y$. 故点 y 关于 Γ 的极线就是 Γ 在 y 点处的切线.

推论 2 若点 y 在 Γ: $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0$ 上，则 Γ 在 y 点处的切线方程为 $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} y_i x_j = 0$.

推论 3 Γ 上的一点 y 与 Γ 在 y 点处切线上的任意点是共轭的.

例 6.2 已知二次曲线 Γ 的方程为

$$2x^2 + 4xy + 6x + 1 = 0,$$

求点 $P(1,2)$ 关于 Γ 的极线，x 轴关于 Γ 的极点.

解 Γ 的齐次方程为

$$2x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + x_3^2 = 0,$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

所以点 $P(1, 2, 1)$ 关于 Γ 的极线为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

即

$$9x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0.$$

设 x 轴：（0，1，0）关于 Γ 的极点为（x_1，x_2，x_3），则

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 0x_2 + 0x_3 = \rho, \\ 3x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

解得 $x_1:x_2:x_3=2:7:-6$，即 x 轴关于Γ的极点为（2，7，-6）.

3.作法：

Ⅰ.已知极点 P，求作 P 关于Γ的极线.

①若 $P\in\Gamma$：

作法 点 P 关于Γ的极线就是Γ在 P 点处的切线.

证明 由定理 6.9 即得.

②若 $P\notin\in\Gamma$：

作法 如图 6.9，过 P 任作二直线交Γ于 A、B、C、D，这四点两两相连得 $Q=AD\times BC$，$R=AC\times BD$，则连线 QR 为点 P 关于Γ的极线.

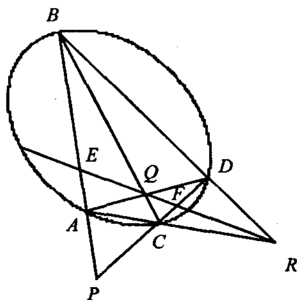


图 6.9

证明 由完全四点形 $ABCD$ 的调和性质有 R（CD，PQ）= -1. 设 $E=AB\times QR$，$R=AC\times BD$，则（AB，PE）=（CD，PF）= -1，所以 E、F 为点 P 关于Γ的共轭点，即 $QR\equiv EF$ 为点 P 关于Γ的极线.

同理可证：PQ 为点 R 的极线，PR 为点 Q 的极线.把△PQR 称为Γ的**自极三角形**.

Ⅱ.已知极线，求作极点.

①若直线 l 与Γ相交于 A、B:

作法 过 A、B 作Γ的切线 PA、PB，交点 P 就是 l 的极点（如图 6.10）.

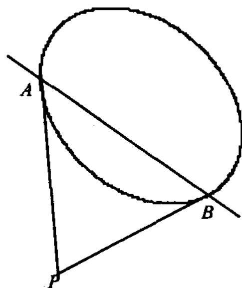


图 6.10

证明 因为 A、B 在Γ上，则 A、B 的极线就是切线 PA、PB. 由于 A、B 的极线都过 P，根据配极原则，P 的极线过 A、B，因此 l 为 P 的极线，即 P 就是 l 的极点.

②若直线 l 与Γ不相交：

作法 如图 6.11，在 l 上取两点 P、Q，作 P、Q 关于Γ的极线 p、q，则 p 与 q 的交点 L 就是直线 l 的极点.

证明 因为 P 的极线 p 过点 L，Q 的极线 q 也过点 L，所以 L 的极线过两点 P、(由配极原则)，因此 P、Q 的连线就是 L 的极线，即 l 的基点为 L.

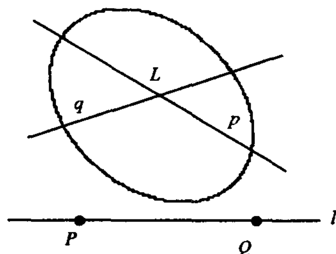


图 6.11

二、配极变换

由前面的讨论可知，对常态（非退化）二次曲线Γ：

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j = 0(a_{ij} = a_{ji}), \quad |a_{ij}| \neq 0.$$

极点 $x(x_1, x_2, x_3)$的极线 $u(u_1, u_2, u_3)$为

$$\begin{cases} \rho u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 (a_{ij} = a_{ji}), |a_{ij}| \neq 0. \\ \rho u_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

即

$$(1) \quad \rho u_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j = 0(i = 1,2,3).$$

因为$|a_{ij}| \neq 0$，所以极线 $u(u_1, u_2, u_3)$的极点 $x(x_1, x_2, x_3)$为

$$\begin{cases} \lambda x_1 = A_{11}u_1 + A_{21}u_2 + A_{31}u_3 \\ \lambda x_2 = A_{12}u_1 + A_{22}u_2 + A_{32}u_3 \text{且} A_{ij} = A_{ji}, |A_{ij}| \neq 0. \\ \lambda x_3 = A_{13}u_1 + A_{23}u_2 + A_{33}u_3 \end{cases}$$

即

$$(2) \quad \lambda x_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ji}x_j = 0(i = 1,2,3).$$

因此，平面内极点与极线之间构成一一对应，称为配极对应或配极变换，其变换式为（1)、（2）.

根据配极变换可证明前面§6.3 提出的二阶曲线与二极曲线的关系：

定理 6.3 非退化二阶曲线的切线的集合是非退化的二级曲线.

证明 设非退化二次曲线Γ的点方程（即二阶曲线）为

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j = 0(a_{ij} = a_{ji}), \quad |a_{ij}| \neq 0 .$$

若点 $x(x_1, x_2, x_3) \in \Gamma$，则其极线为Γ在这点处的切线，从而

$$\begin{cases} \rho u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \rho u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \rho u_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{cases}$$

且

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0.$$

以上四式可看作关于 x_1, x_2, x_3, ρ 的齐次线性方程组，且有不全为 0 的解，所以可消去 x_1, x_2, x_3, ρ 得Γ在这点处的切线 $u(u_1, u_2, u_3)$ 应满足：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

展开即得二次曲线Γ的线方程为

$$\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}u_i u_j = 0(A_{ij} = A_{ji}), |A_{ij}| \neq 0.$$

此方程表示非退化的二级曲线.

同理可证定理 6.3′，即由二次曲线Γ的线方程，可得其点方程为

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & x_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & x_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

展开即得 $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j = 0$.

例 6.3 已知二次曲线Γ的点方程为

$$x_1x_3 - x_2{}^2 = 0,$$

求Γ的线方程；再由求出的线方程推出其点方程.

解 Γ点方程的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1/4 \neq 0,$$

所以Γ的线方程为

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1/2 & u_1 \\ 0 & -1 & 0 & u_2 \\ 1/2 & 0 & 0 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$4u_1u_3 - u_2{}^2 = 0.$$

Γ线方程的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

所以Γ的点方程为

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & x_2 \\ 2 & 0 & 0 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$x_1x_3 - x_2{}^2 = 0.$$

三、配极变换关于圆的定理

圆作为重要的特殊二次曲线，是初等几何中常见的图形.下面讨论配极变换关于圆的几个重要结论，并给出其在初等几何中的应用.

定理 6.10 圆心关于圆的极线为无穷远直线，直径关于圆的极

点为无穷远点.

证明 设圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，齐次方程为

$$x_1^2+x_2^2-2ax_1x_3-2bx_2x_3+(a^2+b^2-r^2)x_3^2=0.$$

即

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ -a & -b & a^2+b^2-r^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{pmatrix}=0.$$

所以圆心（a，b，1）的极线方程为

$$\begin{pmatrix}a & b & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ -a & -b & a^2+b^2-r^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{pmatrix}=0.$$

即为无穷远直线 $x_3=0$.

因为无穷远直线的极点（圆心）在直径上，所以直径的极点在无穷远直线上（配极原则），即直径关于圆的极点为无穷远点.

定理 6.11 圆内接四边形的三双对边之交点构成关于圆的自极三角形.

证明 如图 6.12，由完全四点形 $ABCD$ 的调和性质，很快可得 PQ 为 R 的极线，PR 为 Q 的极线，QR 为 P 的极线，即 $\triangle PQR$ 为圆的自极三角形.

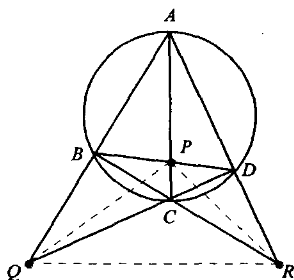


图 6.12

定理 6.12 任意一点关于圆的极线垂直于该点与圆心的连线.

证明 （1）若一点 P 在圆周上，则点 P 关于圆的极线为圆在 P 点处的切线，于是此切线垂直于 P 与圆心的连线（半径）.

（2）若 P 为圆外一点，则点 P 关于圆的极线为过点的两条切线切点的连线，于是此连线垂直于 P 与圆心的连线（如图 6.13）.

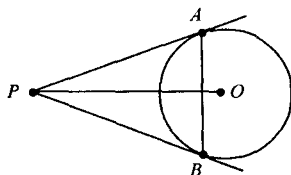


图 6.13

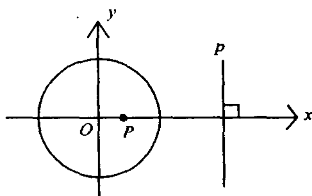


图 6.14

（3）若 P 为圆内一点，则以圆心 O 为坐标原点，连线 OP 为 x 轴的平面直角坐标系中，设 P 的坐标为（a，0），圆的方程为 $x^2+y^2=r^2$，于是点 P 关于圆的极线 p 的方程为 $x=r^2/a$. 显然，p 与 x 轴垂直，从而 P 的极线垂直于 P 与圆心的连线（如图 6.14）.

例 6.4　如图 6.15，从⊙O 的直径 AB 的延长线上一点 E，引圆的切线切圆于 D，交以 A 为切点的切线于 F，作 $DC\perp AB$，连接 FB 交 DC 于 M，求证 $DM=MC$.

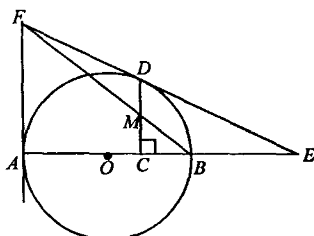


图 6.15

证明　因为 EF 是⊙O 的切线，所以 E 点的极线过 D 点，又因为 $DC\perp EO$，由定理 6.12 知 DC 为 E 点的极线.从而（AB，CE）=-1，即

$$\frac{AC}{AE}=\frac{CB}{BE}=\frac{FD}{FE}.$$

应用梅氏（Menelaus）定理于△DCE 和截线 FMB 得

$$\frac{DM}{MC}\cdot\frac{CB}{BE}\cdot\frac{EF}{FD}=-1,\text{即}\frac{DM}{MC}=1,\ \text{故}DM=MC.$$

例 6.5　仅用直尺过圆外一点作圆的两条切线.

作法　如图 6.16，已知一圆及外一点 P，过点 P 任作两直线交圆于 A、B、C、D 四点，设 $Q=AC\times BD$，$R=AD\times BC$，连接 Q、R 交圆于 T_1、T_2，PT_1 和 PT_2 就是所求的切线.

证明 由定理 6.11 知，圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\triangle PQR$ 为圆的自极三角形，从而 P 点关于圆的极线为 QR，而 QR 过 T_1、T_2，于是 T_1、T_2 关于圆的极线都过 P 点，所以 PT_1 和 PT_2 为 T_1、T_2 关于圆的极线，亦为圆的过 P 点的两条切线.

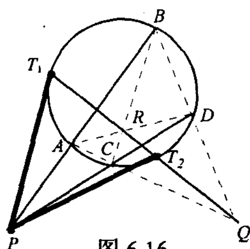


图 6.16

§6.4 二次曲线的射影分类

一、奇异点

1.定义 6.4 设二次曲线Γ（二阶曲线）为

$$(1)\ \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j = 0(a_{ij} = a_{ji}),\quad D = \left|a_{ij}\right|.$$

若点 $x(x_1, x_2, x_3)$的坐标满足

$$(2)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases}$$

则称点 x 为Γ的奇异点，$D = \left|a_{ij}\right|$ 称为Γ的判别式.

2. 性质

Ⅰ. $D = \left|a_{ij}\right|$ 的秩：$r(D)=3$ 时，Γ为非退化的二次曲线，$r(D) \leqslant 2$ 时，Γ为退化的二次曲线；

Ⅱ. 二次曲线Γ的奇异点一定在Γ上；

Ⅲ. 非退化的二次曲线Γ无奇异点，即有奇异点的Γ一定是退化的二次曲线；

Ⅳ. 二次曲线Γ的奇异点与平面上的任意点都关于Γ共轭，但

Γ的奇异点无极线.

证明 Ⅰ. $r(D)=3$ 时 $D\neq 0$，Γ为非退化的二次曲线，$r(D)\leqslant 2$ 时 $D=0$，Γ为退化的二次曲线；

Ⅱ.奇异点 $x(x_1, x_2, x_3)$的坐标满足方程(2)，则满足方程(1)，所以二次曲线Γ的奇异点一定在Γ上；

Ⅲ. 非退化的二次曲线Γ，其判别式 $D\neq 0$，则方程(2)无非 0 解，所以非退化的二次曲线Γ无奇异点，即有奇异点的Γ一定是退化的二次曲线；

Ⅳ. 奇异点 $x(x_1, x_2, x_3)$的坐标满足方程(2)，则与任意点的坐标都满足两点共轭的条件（定理 6.5），所以奇异点与任意点都共轭. 若奇异点有极线，则其坐标为（0，0，0），这是不可能的，所以奇异点无极线.

二、分类方法

1．若 $r(D)=3$，则方程(2)无非 0 解，即Γ无奇异点，平面上任意点 x 都存在唯一的极线(u_1, u_2, u_3):

$$\begin{cases}\rho u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\\ \rho u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\\ \rho u_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.\end{cases}$$

在平面上任取一点 $A_1\notin\Gamma$，则一定有极线 a_1.在 a_1 上取 $A_2\notin\Gamma$，其极线为 a_2，则 a_2 通过 A_1（配极原则）. 设 $A_3=a_1\times a_2$，则 A_3 的极线是 $a_3=A_1A_2$，所以$\triangle A_1A_2A_3$为Γ的自极三角形.以$\triangle A_1A_2A_3$ 为坐标三角形建立射影坐标系$\{A_1, A_2, A_3; E\}$（如图 6.17），来讨论Γ的方程.

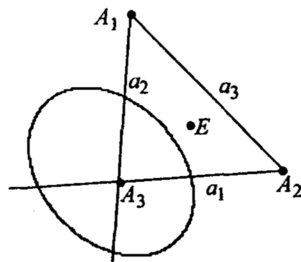


图 6.17

由定理 6.5，两点 y、z 共轭的条

件是：

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}y_i z_j\\&=(a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3)z_1\\&+(a_{12}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3)z_2\\&+(a_{13}y_1+a_{23}y_2+a_{33}y_3)z_3\\&=0.\end{aligned}$$

因为 A_1、A_2，A_2、A_3，A_3、A_1 共轭，所以 $a_{12}=a_{23}=a_{13}=0$，则 Γ 的方程变为（Ⅰ）$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0$（$D=a_{11}a_{22}a_{33}\neq 0$）.

再适当地选取单位点 E，Γ 的方程就变为

①$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$（实二阶曲线），

②$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$（虚二阶曲线）.

2．若 $r(D)=2$，则方程(2)有一个非 0 解，即 Γ 有一个奇异点 y，则 y 没有极线且 y 与任意点 x 都共轭.

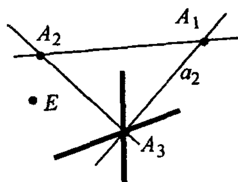


图 6.18

如图 6.18，取奇异点 y 为坐标系 $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ 中的 A_3，将其坐标（0，0，1）代入方程(2)得 $a_{13}=a_{23}=a_{33}=0$. 取不在 Γ 上的任意点为 A_2（0，1，0），则 A_2 的极线 a_2 过 A_3. 在上任取一点为 A_1（1，0，0），由于 A_1、A_2 共轭，所以 $a_{12}=0$，于是 Γ 的方程变为

（Ⅱ）$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2=0$（$a_{11}a_{22}\neq 0$）.

再适当地选取单位点 E，Γ 的方程就变为

③$x_1^2+x_2^2=0$（两条虚直线），

$$④\ x_1^2 - x_2^2 = 0 \text{（两条实直线）}.$$

3．若 $r(D)=1$，则方程(2)三个式子等价，Γ有一条直线，其上的每一个点都是奇异点.取这条直线为坐标系$\{A_1, A_2, A_3; E\}$中$\triangle A_1A_2A_3$的一边 $x_1=0$，即 A_2、A_3 为奇异点，其坐标代入方程(2)得 $a_{12}=a_{22}=a_{13}=a_{23}=a_{33}=0$. 于是Γ的方程变为

$$\text{（III）}\ a_{11}x_1^2 = 0 \ (a_{11} \neq 0).$$

再适当地选取单位点 E，Γ的方程就变为

$$⑤\ x_1^2 = 0 \text{（两条重合直线）}.$$

总结以上内容并由对偶原理可得二次曲线Γ的射影分类如下：

$$\Gamma\begin{cases} \text{二阶曲线}\begin{cases} \text{非退化，}\quad r(D)=3\begin{cases} x_1^2+x_2^2-x_3^2=0(\text{实}), \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=0(\text{虚}). \end{cases} \\ \text{退化}\begin{cases} r(D)=2\begin{cases} x_1^2-x_2^2=0\ (\text{二实直线}), \\ x_1^2+x_2^2=0\ (\text{二虚直线}). \end{cases} \\ r(D)=1 \to x_1^2=0\quad (\text{二重合直线}). \end{cases} \end{cases} \\ \text{二级曲线}\begin{cases} \text{非退化，}\quad r(D)=3\begin{cases} u_1^2+u_2^2-u_3^2=0(\text{实}), \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=0(\text{虚}). \end{cases} \\ \text{退化}\begin{cases} r(D)=2\begin{cases} u_1^2-u_2^2=0\ (\text{二个实点}), \\ u_1^2+u_2^2=0\ (\text{二个虚点}). \end{cases} \\ r(D)=1 \to u_1^2=0\quad (\text{二个重合点}). \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

例 6.6　在射影坐标系中化简二次曲线Γ的方程：

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-6x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3=0.$$

并指出其类型.

解　Γ的判别式为

$$D=\begin{vmatrix}1&-3&1\\-3&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=-16\neq 0,$$

则Γ为非退化的二阶曲线.

在平面上任取一点 P（0，1，1）$\notin\Gamma$，则一定有极线 p：$-x_1+x_2+x_3=0$，在 p 上取 Q（1，0，1）$\notin\Gamma$，其极线为 q：$x_1-x_2+x_3=0$，则 p 与 q 的交点为 R（1，1，0），所以$\triangle PQR$ 为Γ的自极三角形. 以$\triangle PQR$ 为坐标三角形$\triangle A_1A_2A_3$ 建立射影坐标系$\{A_1, A_2, A_3;\ E\}$，将对应点坐标代入坐标变换式

$$\begin{cases}\rho x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ \rho x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\ |a_{ij}|\neq 0.\\ \rho x_3'=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{cases}$$

可求得坐标变换为

$$\begin{cases}\sigma x_1=x_2'+x_3'\\ \sigma x_2'=x_1'+x_3',\\ \sigma x_3'=x_1'+x_2'\end{cases}\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}\neq 0.$$

将此式代入Γ的原方程并化简得

$$x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2=0.$$

所以Γ为实二阶曲线.

三、二次曲线的三种分类方法比较

二次曲线作为几何学的主要研究对象，在各分支中都给出了分类方法. 仿射几何中把二次曲线分为 11 类，射影几何中把二次曲线分为 5 类，欧氏几何（解析几何）中把二次曲线分为 9 类. 三种分类方法既有联系：都是通过选择适当的坐标系，将二次曲线方程化简为标准形式而分类；又有区别：仿射几何中补充了理想元素（无穷远元素），射影几何中无穷远元素与普通元素不加区别地看待，欧氏几何中没有无穷远元素. 在仿射几何与射影几何中，都选择了二次曲线的一个自极三角形作为坐标三角形，而这种坐标三角形的特殊情形就是，欧氏几何中的笛氏坐标系. 因此，二次曲线在欧氏几何中的分类是仿射几何中分类的特例，而在射影几何中的分类又是在仿射几何中分类的推广. 下面给出三种分类方法的比较.

设二次曲线Γ（二阶曲线）为

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j = 0(a_{ij} = a_{ji}), A = (a_{ij}), A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

1. A 的秩为 3 且 $A_{33} \neq 0$

（1）在仿射几何中去取Γ的中心为 A_3 的，过此中心的两条共轭直径为 A_3A_1、A_3A_2，适当选取单位点 E，则在坐标系$\{A_1, A_2, A_3; E\}$中，Γ的方程可表示为

①$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$（实椭圆），

②$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$（虚椭圆），

③$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$（双曲线）.

（2）在射影几何中，由于无穷远元素与普通元素不加区别，因此Γ没有中心（无穷远直线的极点）和直径（无穷远点的极线）概念.这时 A_3 点可取为不在Γ上的任意点；在 A_3 的极线上取不在Γ

上的任意点为 A_1，则 A_1 的极线过 A_3；再把 A_3 的极线与 A_1 的极线交点取为 A_1，则$\triangle A_1A_2A_3$ 为 Γ 的自极三角形.以$\triangle A_1A_2A_3$ 为坐标三角形建立的射影坐标系$\{A_1, A_2, A_3; E\}$中，由于无穷远直线无特殊性，则Γ 的方程可表示为

$$①' \quad x_1^2+x_2^2-x_3^2=0 \text{（实二阶曲线）},$$

$$②' \quad x_1^2+x_2^2+x_3^2=0 \text{（虚二阶曲线）}.$$

（3）在欧氏几何中，对中心曲线Γ（$A_{33}\neq 0$），取中心为 A_3（相当于坐标原点），取Γ 的两条主直径 A_3A_1、A_3A_2 为 x 轴和 y 轴，则Γ 的方程可表示为

$$①'' \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{（实椭圆）},$$

$$②'' \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1 \text{（虚椭圆）},$$

$$③'' \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{（双曲线）}.$$

2. A 的秩为 3 且 $A_{33}=0$

（1）在仿射几何中，此时的Γ为抛物线，其中心为无穷远直线与Γ的切点，取为 A_1；Γ 的任意直径与Γ的普通交点取为 A_3；Γ 在 A_3 处的切线与无穷远直线的交点取为 A_1，以$\triangle A_1A_2A_3$ 为坐标三角形建立的坐标系$\{A_1, A_2, A_3; E\}$中，Γ 的方程可表示为

$$④ \qquad x_2^2+2x_1x_3=0 \text{（抛物线）}.$$

（2）在射影几何中，由于无穷远元素与普通元素不加区别，因此Γ没有中心概念，于是这种情况被包含在①′和②′中.

（3）在欧氏几何中，可选取抛物线的顶点为 A_3（坐标原点）；Γ 在顶点处的切线为 y 轴，Γ 的主直径为 x 轴（此时的坐标系不含 A_1A_2 边），则 Γ 的方程可表示为

④′′ $y^2=2px$（抛物线）.

3. A 的秩为 2（Γ 为退化二次曲线，有唯一奇异点）

（1）奇异点为普通点：

在仿射几何中，取 Γ 的唯一奇异点为 A_3，A_2 取为不在 Γ 上的任意点，则 A_2 的极线过 A_3；在 A_2 的极线上取不在 Γ 上异于 A_3 的任意点为 A_1，以 $\triangle A_1A_2A_3$ 为坐标三角形（A_3 相当于无穷远直线 A_1A_2 的极点，即为中心；A_1A_3 、A_2A_3 相当于一对共轭直径）建立的坐标系 $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ 中，Γ 的方程可表示为

⑤ ${x_1}^2-{x_2}^2=0$（一对相交的实直线），

⑥ ${x_1}^2+{x_2}^2=0$（一对相交的虚直线）.

在射影几何中，与上述方法一样，Γ 的方程可表示为

③′ ${x_1}^2-{x_2}^2=0$（一对相交的实直线），

④′ ${x_1}^2+{x_2}^2=0$（一对相交的虚直线）.

在欧氏几何中，取 Γ 的中心为 A_3，取 Γ 的一对共轭直径为为 x 轴和 y 轴，则 Γ 的方程可表示为

⑤′′ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（一对相交的实直线），

⑥′′ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（一对相交的虚直线）.

（2）奇异点为无穷远点（无穷远直线上无Γ上的点）：

在仿射几何中，取无穷远奇异点为 A_2，取不在Γ上的任意点为 A_1，在 A_1 的极线上取异于 A_2 的任意点为 A_3，则在坐标系$\{A_1, A_2, A_3; E\}$中，Γ的方程可表示为

⑦ $x_1^2 - x_3^2 = 0$（一对平行的实直线），

⑧ $x_1^2 + x_3^2 = 0$（一对平行的虚直线）.

在射影几何中，由于无穷远元素与普通元素不加区别，因此这种情况包含在③′和④′中.

在欧氏几何中，取 A_3 为坐标原点，取 A_3A_1、A_3A_2 为 x 轴和 y 轴，则此时的笛氏坐标系中，Γ的方程可表示为

⑦′′ $x^2 = a^2$（一对平行的实直线），

⑧′′ $x^2 = -a^2$（一对平行的虚直线）.

（3）奇异点为无穷远点（无穷远直线上有Γ上的点）：

在仿射几何中，取无穷远奇异点为 A_2，在Γ上取异于 A_2 的无穷远点为 A_1，在Γ上取普通点为 A_3，则在坐标系$\{A_1, A_2, A_3; E\}$中，Γ的方程可表示为

⑨ $x_1x_3 = 0$（一普通直线 $x_1 = 0$、一无穷远直线 $x_3 = 0$）.

在射影几何中，由于无穷远元素与普通元素不加区别，因此这种情况仍包含在③′和④′中.

在欧氏几何中，取 A_3 为坐标原点，取 A_3A_1、A_3A_2 为 x 轴和 y 轴，则此时的笛氏坐标系中，不考虑无穷远直线，Γ的方程可表示为

⑨′′ $x^2 = 0$（一对重合于 y 轴的实直线）.

4. A 的秩为 1（Γ 为退化二次曲线，有无数多奇异点在一条直线上）

（1）奇异点所在直线不是无穷远直线：

在仿射几何中，取奇异点所在直线为 A_3A_2，取该直线外任意一点为 A_1，则在坐标系$\{A_1, A_2, A_3; E\}$中，Γ 的方程可表示为

⑩　$x_1^2=0$（一对非无穷远直线的重合直线）.

在射影几何中，与上述方法一样，Γ 的方程可表示为

⑤′　$x_1^2=0$（一对任意重合直线）.

在欧氏几何中，这种情况包含在⑨′′中.

（2）奇异点所在直线为无穷远直线：

在仿射几何中，取奇异点直线为 A_1A_2，取该直线外任意一点为 A_3，则在坐标系$\{A_1, A_2, A_3; E\}$中，Γ 的方程可表示为

⑪　$x_3^2=0$（一对重合于无穷远直线的直线）.

在射影几何中，由于无穷远直线与普通直线不加区别，因此这种情况仍包含在⑤′中.

在欧氏几何中，由于不考虑无穷远直线，因此不存在这种情况.

习题六

1. 已知二阶曲线上的五点（0，2，1），（0，-2，1），（3，0，-1），（3，0，1），（$3\sqrt{3}/2$，1，1），求此二阶曲线的方程，并化为非齐次方程.

2. 已知二阶曲线是两个射影线束

$$x_1-kx_3=0 \text{ 与 } x_2-k'x_3=0\ (kk'-k+2k'+1=0)$$

决定的，求此二阶曲线的方程，并化为非齐次方程.

3. 已知二阶曲线的五个点（无三点共线），利用帕斯卡定理求作：

（1）二阶曲线上其它的点.

（2）二阶曲线在这五点之一处的切线.

4. 求极线：

（1）点（1，-1，0）关于二阶曲线

$$3x_1^2+5x_2^2+x_3^2+7x_1x_2+4x_1x_3+5x_2x_3=0;$$

（2）点（5，1，7）关于二阶曲线

$$2x_1^2+3x_2^2+x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3=0.$$

5. 求极点：

（1）直线（3，-1，6）关于二阶曲线

$$x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3=0;$$

（2）直线（1，-1，0）关于二阶曲线

$$2x_1^2-x_2^2-x_3^2+6x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3=0.$$

6. 已知二阶曲线Γ的配极变换表达式为

$$\begin{cases}\rho u_1=x_1+2x_2+3x_3,\\ \rho u_2=2x_1+x_2-x_3,\\ \rho u_3=3x_1-x_2+x_3.\end{cases}$$

求证:三点 A（1，0，4），B（0，7，2），C（5，-41，-21）关于Γ成自极三角形.

7. 求以 $x_1x_3-x_2^2=0$ 为点方程的二次曲线的线方程.

8. 求以 $4u_1u_3-u_2^2=0$ 为线方程的二次曲线的点方程.

9. 化简二次曲线Γ的方程：

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0.$$

并指出其名称和奇异点.

综合复习题

一、判断正误题：

1. 高等几何的主要内容是射影几何学.(　)
2. 仿射是透视仿射链.(　)
3. 两回透视仿射的积一定是透视仿射.(　)
4. 若三点的简比 $(ABC)=-1$，则点 C 是线段 AB 的中点.(　)
5. 若三点的简比 $(ABC)>0$，则点 C 是线段 AB 的外分点.(　)
6. 若三点的简比 $(ABC)<0$，则点 C 是线段 AB 的内分点.(　)
7. 任意二线段的长度之比是仿射不变量.(　)
8. 无穷远直线的方程是 $u_3=0$.（　）
9. 无穷远点的方程是 $x_3=0$.（　）
10. 无穷远直线的坐标是（0，0，1）.（　）
11. 角的内外角平分线关于这个角的两边成调和线束.（　）
12. 交比（AB，CB）=0.（　）
13. 交比（0∞，11）=0.（　）
14. $uu'=1$ 是对合，且（1-1，uu'）= -1.（　）
15. $uu'=-1$ 是对合，且（i -i，uu'）= -1.（　）
16. 对合只有椭圆型和抛物型两种.（　）
17. 两线束成透视的几何特征是对应点在对应线上.（　）
18. 二维射影坐标系$\{A_1, A_2, A_3; E\}$中，连线 A_2E 的方程是 $x_1-x_3=0$.（　）

19.在笛氏坐标系下保持两点 I（1，i，0）、J（1，-i，0）不变的射影变换称为相似变换.（　）

20. 射影变换群是 8 维群.（　）

21. 非退化二阶曲线所有切点的轨迹是非退化二级曲线.（　）

22. 有奇异点的二阶曲线一定是非退化二阶曲线.（　）

23. 二阶曲线的奇异点一定在二阶曲线上.（　）

24. 非退化二阶曲线只有两种，即实或虚二阶曲线.（　）

25. 退化二级曲线只有两种，即实点或虚点.（　）

二、选择题：

1. 高等几何的主要内容是(　).

A. 欧氏几何学　　B. 仿射几何学

C. 射影几何学　　D. 非欧几何学

2. 简比是基本的(　)不变量.

A. 欧氏　B. 仿射　C. 射影　D. 笛氏

3. 交比是基本的(　)不变量.

A. 欧氏　B. 仿射　C. 射影　D. 笛氏

4. 两个等面积的正方形经仿射后变为（　）.

A. 两个等面积的正方形　　B. 两个等面积的矩形

C.两个等面积的平行四边形　　D. 任意两图形

5. 两回透视仿射的积（　）透视仿射.

A. 一定是　　B. 不一定是

C. 一定不是　　D. 以上都不对

6. 若三点的简比（ABC）(　)，则点 C 是线段 AB 的中点.

A. >0　B. <0　C. $=0$　D. $=-1$

7. 若三点的简比（ABC）(　)，则点 C 是线段 AB 的内分点.

A. >0　B. <0　C. $=0$　D. $=-1$

8. 若三点的简比（ABC）(　)，则点 C 是线段 AB 的外分点.

A. >0　B. <0　C. $=0$　D. $=-1$

9. 圆的仿射图形是（　）.

A．椭圆　　B．圆　　C．双曲线　　D．抛物线

10. 无穷远直线的方程是（　　）.

A．$x_1=0$　　B．$x_2=0$　　C．$x_3=0$　　D．$u_3=0$

11. 坐标原点的方程是（　　）.

A．$u_3=0$　　B．$x_3=0$　　C．$x_2=0$　　D．$x_1=0$

12. 通过点（1，i，0）的实直线方程是（　　）.

A．$x_3=0$　　B．$u_3=0$　　C．$u_2=0$　　D．$u_1=0$

13. 直线（1，i，0）上实点的方程是（　　）.

A．$u_1=0$　　B．$u_2=0$　　C．$u_3=0$　　D．$x_3=0$

14. 设交比（AB，CD）= -2，则（AC，BD）=（　　）.

A．-2　　B．3　　C．-1/2　　D．2

15. 交比（AB，CA）=（　　）.

A．0　　B．∞　　C．1　　D．-1

16.对合 $u+u'=0$ 是（　　）型的.

A．椭圆　　B．抛物　　C．双曲　　D．圆

17. 一维射影变换 S 成为对合的条件是（　　）.

A．$S=I$（恒等变换）　　B．$S\neq I$

C．$S\neq I$ 且 $S^2=I$　　D．$S=I$ 且 $S^2=I$

18. 笛沙格定理的构形代号是（　　）.

A．$\begin{pmatrix}10 & 3\\ 3 & 10\end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix}9 & 3\\ 3 & 9\end{pmatrix}$　　C．$\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix}6 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

19. 二维射影坐标系{A_1，A_2，A_3；E}中，连线 A_3E 的方程是（　　）.

A．$x_1-x_2=0$　　B．$x_1-x_3=0$

C．$x_2-x_3=0$　　D．$x_1+x_2=0$

20. 二维射影变换由（　　）对对应元素唯一决定.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

21. 平面内的虚圆点是指（　　）.

A．（1，0，0）与（0，1，0）

B．（1，0，0）与（0，0，1）

C．（1，i，1）与 J（1，-i，1）

D．（1，i，0）与（1，-i，0）

22. 仿射变换群是（　　）维群.

A．3　　B．4　　C．6　　D．8

23. 交比群是（　　）群.

A．3 维　　B．6 维　　C．8 维　　D．有限

24. 非退化二级曲线可射影分类为（　　）种.

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

25. 退化二阶曲线可射影分类为（　　）种.

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

三、填空题：

1. 从历史文献可以看出，有着古老文化的________、________、________、________等国家是几何学的重要发源地.

2. 高等几何的主要内容是________几何学.

3. 基本的仿射不变性有________、________、________等.

4. 基本的仿射不变量有________、________、________等.

5. 三点的简比（ABC_∞）=________.

6. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积=________.

7. 坐标（1，1，-1）表示的直线方程是________________.

8. 坐标原点的方程是________________.

9. 点（2，i，1-i）的共轭复点是________________.

10. 一线段的中点是这直线上________________的调和共轭点.

11. 交比（AB，CC）=________________.

12. 两点列成透视的几何特征是________________.

13. $\begin{pmatrix}4 & 3\\2 & 6\end{pmatrix}$是________________的构形代号.

14. 二维射影坐标系$\{A_1, A_2, A_3; E\}$中，过顶点A_1的直线方程是____________________________.

15. 在笛氏坐标系下互换两点$I(1, i, 0)$、$J(1, -i, 0)$的射影变换称为______________________.

16. 运动变换群是________维群.

17. 配极原则的内容是____________________________.

18. 三对对边互相平行的六边形一定________于一条二次曲线.

19. 任意点关于圆的极线与________________________垂直.

20. 自极三角形是指______________________________.

四、计算题：

1. 求使点（0，0）、（1，1）、（1，-1）分别变为（2，3）、（2，5）、（3，-7）的仿射变换.

2. 求使直线

$$x=0, y=0, x+2y-1=0$$

分别变为

$$x'+y'=0, x'-y'=0, x'+2y'-1=0$$

的仿射变换.

3. 求下列各直线的齐次方程，并求各直线上的无穷远点的坐标：

（1） $x=0$，

（2） $y=0$，

（3） $3x+2y=0$，

（4） $x+2y-1=0$.

4. 求下列各点的方程：

（1）（2，4，-1），

（2）（-1，1，-1），

（3）x 轴上的无穷远点，

（4）直线 $x-y=0$ 上的无穷远点.

5. 求四点 A（2，1，-1）、B（1，-1，1）、C（1，0，0）、D（1，5，-5）的交比（AB，CD）.

6. 求 P_1、P_2 分别是 x 轴和 y 轴上的无穷远点，P_3 是斜率为 1 的方向上的无穷远点，且（P_1P_2，P_3P_4）$=k$，求 P_4 的坐标.

7. 已知对合的二重元素为 2，一对对应元素为 1 与 4，求对合的表达式.

8. 在直线上取笛氏坐标为 2，0，3 的三点为射影坐标系的 A_1，A_2，E. 求笛氏坐标为 1 的点在射影坐标系$\{A_1, A_2, E\}$中的坐标.

9. 求射影变换

$$\begin{cases}\rho x_1'=kx_1+x_2\\ \rho x_2'=\qquad kx_2+x_3\ (k\text{ 为常数})\\ \rho x_3'=\qquad\qquad kx_3\end{cases}$$

的二重元素.

10. 举例说明变换之积不满足交换律.

11. 求两个射影线束 $x_1-kx_2=0$ 与 $x_2-k'x_3=0$（$k=1-k'$）所构成的二阶曲线的方程.

12. 求两个射影点列

$$u_1-ku_3=0 \text{ 与 } u_2-k'u_3=0\ \left(k'=\frac{k-1}{k+2}\right)$$

所构成的二级曲线的方程.

13. 求极线：

（1）点 P（1，2，1）关于二阶曲线

$$2x_1^2+x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3=0\,;$$

（2）点 Q（1，0，2）关于二阶曲线

$$x_1^2+4x_2^2+9x_3^2+4x_1x_2+12x_2x_3+6x_1x_3=0;$$

（3）点 R（0，-2，3）关于二阶曲线

$$2x_1^2+x_2^2-x_3^2-4x_1x_2+6x_2x_3=0.$$

14. 求极点：

（1）x 轴关于二阶曲线

$$2x_1^2+x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3=0;$$

（2）y 轴关于二阶曲线

$$2x_1^2+x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3=0;$$

（3）直线 $x+y+1=0$ 关于二阶曲线

$$2x_1^2+x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3=0.$$

15. 化简二次曲线的方程，求奇异点，并指出是何种曲线：

（1）$2x_1^2+3x_2^2-x_3^2+x_1x_2+2x_2x_3-x_1x_3=0$；

（2）$2x_1^2-x_2^2+5x_3^2-x_1x_2-4x_2x_3+7x_1x_3=0$；

（3）$x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2-8x_2x_3+4x_1x_3=0$.

五、证明题：

1. 证明平行性是仿射不变性.

2. 证明共线三点的简比是仿射不变量.

3. 求证三点（$1+i$，$-1+i$）、（$1,1+i$）、（$i,-1-i$）共线，并求其上的实点.

4. 证明直线 $Ax+By+C=0$ 与两点 P_1（x_1，y_1）、P_2（x_2，y_2）的

连线的交点 P（x_0，y_0）关于线段 P_1P_2 的分割比是

$$-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}.$$

5. 由仿射变换的代数表达式证明对应三角形的面积之比 $\frac{S'}{S}=|D|$（D 为仿射的系数行列式）.

6. 若（r_1r_2，r_3r_4）$=k$，则 $\frac{1-k}{r_2-r_1}=\frac{1}{r_4-r_1}-\frac{k}{r_3-r_1}$.

7. 求证在仿射直线上，点 C 是线段 AB 中点的充要条件是

$$(AB,\ CD_\infty)=-1.$$

8. 证明绕坐标原点的全体旋转变换构成群.

9. 证明以 $x_1x_3-x_2^2=0$ 为点方程的二次曲线，其线方程为

$$4u_1u_3-u_2^2=0.$$

10. 证明以 $u_1u_3-u_2^2=0$ 为线方程的二次曲线，其点方程为

$$4x_1x_3-x_2^2=0.$$

11. 叙述并证明笛沙格定理.

12. 叙述并证明帕斯卡定理.

13. 叙述并证明完全四线形的调和性质.

14. 用帕斯卡定理证明巴卜斯定理.

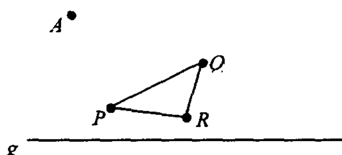
15. 设平面上两点 A（0，1）、B（1，0）及直线 $x-y=0$ 上的无穷远点 C，求证△ABC 关于二阶曲线

$$x^2-6xy+y^2+2x+2y+1=0$$

成自极三角形.

六、作图题：

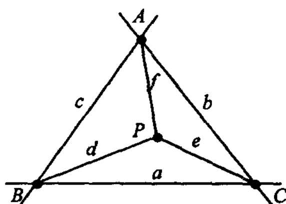
1. 给定透视仿射 T 的对应轴 g 和一对对应点 A、A'，求作已知△PQR 的对应图形（如图一），并求作 T^2（P）和 T^3（P）.



图一

2. 作图说明中心投影一般不保留共线三点的简比.

3. 作出图二的对偶图形，并标示相对应的点和直线.



图二

4. 已知共线四点 A、B、C、D 中的三点 A、B、C 和交比（AB，CD）= -2，求作第四点 D.

5. 设（AB，CD）= -1/3，B 是线段 AD 偏 A 的三等分点，求作点 C.

6. 已知两直线 a、b 和外一点 P，不先作出这两直线交点的情况下，求作一直线通过这个交点与 P 点.

7. 已知二阶曲线上五点，求作其它的点.

8. 已知二阶曲线上五点，求作其中一点处的切线.

9. 已知二阶曲线内一点，求作这点关于二阶曲线的极线.

10. 已知二阶曲线外一点，求作这点关于二阶曲线的极线.

11. 已知圆外一点，仅用直尺求作过这点的圆的两条切线.

提示与答案

习题一

5. **证明**：由矢性积的定义易知$\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3$彼此垂直，且构成右手系. 下证它们均为单位矢量. 因为 $\vec{r}_1=\vec{r}_2\times\vec{r}_3$，$\vec{r}_2=\vec{r}_3\times\vec{r}_1$,所以$|\vec{r}_1|=|\vec{r}_2||\vec{r}_3|$，$|\vec{r}_2|=|\vec{r}_3||\vec{r}_1|$，即 $|\vec{r}_1|=|\vec{r}_3|^2|\vec{r}_1|$.由于 $|\vec{r}_1|\neq 0$，从而 $|\vec{r}_3|^2=1$，$|\vec{r}_3|=1$.同理可证 $|\vec{r}_2|=1$，$|\vec{r}_1|=1$. 即$\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3$都是单位矢量.

10. **证明**：因为$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})$,

所以 $|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\angle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})|$

$\leqslant|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$

$\leqslant|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$. 欲使等号成立，则必有 $\sin\angle(\vec{a},\vec{b})=1$, $|\cos\angle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})|=1$ 同时成立，从而有

$$\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{2}\quad 且\ \angle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})=0\ 或\ \pi,$$

此即$\vec{a}\perp\vec{b}$,$(\vec{a}\times\vec{b})//\vec{c}$. 所以当$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$两两互相垂直时等号成立.

设$\vec{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$，$\vec{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$，$\vec{c}=\{X_3,Y_3,Z_3\}$，则有

$$\left\|\begin{matrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ Z_3 & Y_3 & Z_3\end{matrix}\right\|\leqslant\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}\sqrt{X_3^2+Y_3^2+Z_3^2}.$$

11. **证明**：因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{R}=(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot[(\vec{r}_1\times\vec{r}_2)+(\vec{r}_2\times\vec{r}_3)+(\vec{r}_3\times\vec{r}_1)]$

$=(\vec{r_2}\,\vec{r_1}\,\vec{r_2})+(\vec{r_2}\,\vec{r_2}\,\vec{r_3})+(\vec{r_2}\,\vec{r_3}\,\vec{r_1})-(\vec{r_1}\,\vec{r_1}\,\vec{r_2})-(\vec{r_1}\,\vec{r_2}\,\vec{r_3})-(\vec{r_1}\,\vec{r_3}\,\vec{r_1})$

$=(\vec{r_1}\,\vec{r_2}\,\vec{r_3})-(\vec{r_1}\,\vec{r_2}\,\vec{r_3})=0$，所以 $\overrightarrow{AB}\perp\vec{R}$. 同理可证 $\overrightarrow{AC}\perp\vec{R}$.

故 $\vec{R}\perp$平面 ABC.

12.（3）设四面体 $A_1A_2A_3A_4$,A_i 对面重心为 G_i, 欲证 A_iG_i 交于一点($i=1, 2, 3, 4$).在 A_iG_i 上取一点 P_i，使 $\overrightarrow{A_iP_i}=3\overrightarrow{P_iG_i}$，从而 $\overrightarrow{OP_i}=\dfrac{\overrightarrow{OA_i}+3\overrightarrow{OG_i}}{1+3}$，设 $A_i(x_i, y_i, z_i)(i=1, 2, 3, 4)$，则

$$G_1\left(\frac{x_2+x_3+x_4}{3},\ \frac{y_2+y_3+y_4}{3},\ \frac{z_2+z_3+z_4}{3}\right),$$

$$G_2\left(\frac{x_1+x_3+x_4}{3},\ \frac{y_1+y_3+y_4}{3},\ \frac{z_1+z_3+z_4}{3}\right),$$

$$G_3\left(\frac{x_1+x_2+x_4}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_4}{3},\ \frac{z_1+z_2+z_4}{3}\right),$$

$$G_4\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3},\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right),$$

所以

$$P_1\left(\frac{x_1+3\cdot\frac{x_2+x_3+x_4}{3}}{1+3},\frac{y_1+3\cdot\frac{y_2+y_3+y_4}{3}}{1+3},\frac{z_1+3\cdot\frac{z_2+z_3+z_4}{3}}{1+3}\right)$$

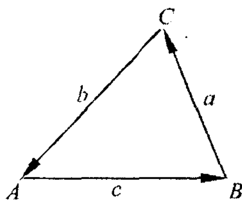
$$\equiv P_1\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4},\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right).$$

同理得 $P_2\equiv P_3\equiv P_4\equiv P_1$，所以 A_iG_i 交于一点 P，且这点到顶点距离等于这点到对面重心距离的三倍.

12.（4）**证明** 如图答一，在△ABC 中，设 $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，且$|\vec{a}|=a, |\vec{b}|=b, |\vec{c}|=c$, 则 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$,从而有 $\vec{b}\times\vec{c}$

$=\vec{c}\times\vec{a}=\vec{a}\times\vec{b}$,所以 $|\vec{b}\times\vec{c}|=|\vec{c}\times\vec{a}|=$

$|\vec{a}\times\vec{b}|$， 即



图答一

$$bc\sin A=ca\sin B=ab\sin C,$$

于是 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

12. (5) 同上题图，$\triangle ABC$ 的面积为$\Delta=\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$, 所以$\Delta^2=\dfrac{1}{4}(\vec{a}\times\vec{b})^2$.而 $(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$,所以$\Delta^2=\dfrac{1}{4}[\vec{a}^2\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2]$.由于$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$,从而$\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$，$(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{c}^2$,所以$\vec{a}\ \vec{b}=\dfrac{1}{2}(\vec{c}^2-\vec{a}^2-\vec{b}^2)=\dfrac{1}{2}(c^2-a^2-b^2)$,故有$\Delta^2=\dfrac{1}{4}[a^2b^2-\dfrac{1}{4}(c^2-a^2-b^2)^2]=\dfrac{1}{16}[2ab-(c^2-a^2-b^2)][2ab+(c^2-a^2-b^2)]=\dfrac{1}{16}[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]=\dfrac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)=\dfrac{1}{16}\cdot 2p\cdot(2p-2c)(2p-2b)(2p-2a)$. 所以

$$\Delta^2=p(p-a)(p-b)(p-c) \quad 或 \quad \Delta=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

习题二

1. 提示：在平面π上相交于没影线的两条直线的影象为平面π'上的两直线且相交于无穷远点.

2.（1）（2，3，1）与（2，3），（2）（2，3，-3）与（-2/3，-1），（3）（3，-1，0），无非齐次坐标.

3.（1）$u_3=0$，无非齐次方程，（2）$u_1+u_2-u_3=0$，$u+v-1=0$，（3）$3u_1-2u_2=0$，$3u-2v=0$. 4. $x_1+x_3=0$，$x+1=0$. 5. (45，31，-7). 6. 提示：在$\triangle ALF$和$\triangle UGC$中运用笛沙格逆定理. 7. 略. 8. 提示：运

用笛沙格定理. 9.（3，-8，-2）. 10. $x_3=0$. 11. $2u_1+iu_2+(1-i)u_3=0$.

12. $I(1,i,0)$，$J(1,-i,0)$.

习题三

1. 略. 2. 略. 3. 略. 4.（1）梯形，（2）椭圆，（3）两个等积的平行四边形，（4）任意两条线段. 5. -1. 6. 略. 7. 略.

8. $T_1T_2:\begin{cases} x'=3x+2, \\ y'=3x+y-1. \end{cases}$ $T_2T_1:\begin{cases} x'=3x+2, \\ y'=x+y-3. \end{cases}$ 9. $T:\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+2, \\ y'=-4x+6y+3. \end{cases}$

10. 提示：三点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$ 的简比为 $(ABC)=(x_3-x_1)/(x_3-x_2)=(y_3-y_1)/(y_3-y_2)$，对应三点 $A'(x_1', y_1')$、$B'(x_2', y_2')$、$C'(x_3', y_3')$ 的简比为 $(A'B'C')=(x_3'-x_1')/(x_3'-x_2')=(y_3'-y_1')/(y_3'-y_2')$，代入仿射变换式即得. 11.（-6，-8）. 12. 提示：因为圆的仿射图形为椭圆，而在圆中显然有此结论，又知面积之比是仿射不变量，即得证.

习题四

1. $(AB, CD)=4/3$，$(AB, DC)=3/4$，$(AC, BD)=-1/3$，$(AC, DB)=-3$，$(AD, BC)=1/4$，$(AD, CB)=4$. 2. $(AB, CD)=-2/3$. 3. 略.
4.（3，-1，3）. 5. 设 $7x-y=0\equiv(2x-y+1)+k_1(3x+y-2)=0$，$5x-1=0\equiv(2x-y+1)+k_2(3x+y-2)=0$，则 $k_1=1/2$，$k_2=1$，所以四直线共点，且交比等于 1/2. 6. ∵ $(01, \infty x)=(1\infty, 0x')$，∴ $(10, x\infty)=(0x', 1\infty)$，则 $(10x)=(0x'1)$，即 $x'=1/(1-x)$. 7.（1）$x'=x$，（2）$x'=-x$，（3）$x'+x-5=0$. 8. 两次. 9. 略. 10.（1）$S_1=-1$，$S_2=-6$，（2）$S_1=S_2=1$，（3）$S_1=-1/3$，$S_2=\infty$. 11.（1）$xx'-5x-5x'+12=0$，（2）$axx'+b(x+x')+c=0$. 12.在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PQR$ 中，运用笛沙格定理即得.

习题五

1. $\lambda=x/(3x-6)$． 2. A_1E: $x_2-x_3=0$，（0，1，-1），A_2E: $x_1-x_3=0$，（1，0，-1），A_3E: $x_1-x_2=0$，（1，-1，0）． 3. $u_2x_2-u_3x_3=0$，$u_1x_1-u_3x_3=0$，$u_1x_1-u_2x_2=0$． 4. $\begin{cases}\rho x_1=x-y, \\ \rho x_2=x+y-t, \\ \rho x_3=-2x+4t.\end{cases}$ 5. A_1A_2: $x_1'+x_2'=0$，A_2A_3: $x_2'+x_3'=0$，A_3A_1: $x_1'+x_3'=0$． 6. $\begin{cases}\rho x_1'=x_2-x_3, \\ \rho x_2'=x_1-x_3, \\ \rho x_3'=x_1+x_2-x_3.\end{cases}$ $D=\begin{vmatrix}0&1&-1\\1&0&-1\\1&1&-1\end{vmatrix}=1\neq 0$． 7. 特征根 $\lambda=1$（三重根）；二重点：$x_2=0$（即坐标三角形 A_3A_1 边上的所有点）；二重直线：$u_2x_2-u_3x_3=0$（即过坐标三角形顶点 A_1 的所有直线）． 8. 特征根 $\lambda=-1$，-2，3；二重点：（0，0，1），（1，6，5），（1，1，0）；二重直线：$x_1-x_2+x_3=0$，$x_1-x_2=0$，$-6x_1+x_2=0$． 9.略．
10. 略． 11. 矢量的摸、相等关系、线性运算、线性关系、数性积、矢性积、混合积等都是欧氏几何的内容，而矢量的摸、数性积、矢性积、混合积等在仿射变换下一般要改变，因此不是仿射几何的内容，矢量的相等关系、线性运算、线性关系等都是是仿射几何的内容． 12.（1）欧氏，（2）欧氏，（3）仿射，（4）仿射，（5）射影，（6）射影，（7）欧氏，（8）射影，（9）欧氏，（10）仿射，（11）仿射，（12）射影，（13）仿射，（14）欧氏．

习题六

1. $4x_1^2+9x_2^2-36x_3^2=0$，即 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$． 2. $x_3^2+x_1x_2-x_1x_3+2x_2x_3=0$，$xy-x+2y+1=0$． 3. 略． 4. (1) $x_1+3x_2+x_3=0$，(2) $x_2=0$，即 x 轴． 5. (1)（4，0，-1），(2)（-4，7，3）． 6. A 的极线为 $13x_1-2x_2+7x_3=0$，B 的极线为 $4x_1+x_2-x_3=0$，C 的极线为

$28x_1+2x_2-7x_3=0$，显然，B、C 在 A 的极线上，A、C 在 B 的极线上，A、B 在 C 的极线上，所以，三点 A、B、C 关于 Γ 成自极三角形.

7. $4u_1u_3-u_2^2=0$，　8. $x_1x_3-x_2^2=0$，　9. $x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2=0$（非退化实二阶曲线，无奇异点）.

综合复习题

一、1. √，2. √，3. ×，4. √，5. √，6. √，7. ×，8. ×，9. ×，10. √，11. √，12. √，13. ×，14. √，15. √，16. ×，17. ×，18. √，19. √，20. √，21. ×，22. ×，23. √，24. √，25. ×.

二、1.C，2.B，3.C，4.C，5.B，6.D，7.B，8.A，9.A，10.C，11.A，12.A，13.C，14.B，15.B，16.C，17.C，18.A，19.A，20.D，21.D，22.C，23.D，24.A，25.B.

三、1. 中国、埃及、希腊、印度. 2. 射影. 3. 同素性、接合性、平行性. 4. 简比、二平行线段之比、面积之比. 5. 1. 6. πab. 7. $x_1+x_2-x_3=0$. 8. $u_3=0$. 9.（2，$-i$，$1+i$）. 10. 无穷远点. 11. 1. 12. 对应点的连线共点. 13. 完全四点形. 14. $u_2x_2-u_3x_3=0$. 15. 反相似变换. 16. 3. 17. 若点 y 的极线过点 z，则点 z 的极线过点 y. 18. 内接. 19. 此点与圆心的连线. 20. 三角形的每个顶点的极线是其对边.

四、1. $\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+2 \\ y'=-4x+6y+3 \end{cases}$. 2. $\begin{cases} x'=\frac{1}{3}x-2y \\ y'=\frac{1}{3}x-2y \end{cases}$. 3. (1) $x_1=0$，(0,1,0); (2) $x_2=0$，(1，0，0); (3) $3x_1+2x_2=0$，(-2，3，0); (4) $x_1+2x_2-x_3=0$，(-2,1,0). 4. (1) $2u_1+4u_2-u_3=0$，(2) $-u_1+u_2-u_3=0$，(3) $u_1=0$，(4) $u_1+u_2=0$. 5. -2/3. 6. (k，1，0). 7. $uu'-4=0$. 8. -1/3. 9.（1，0，0），$x_3=0$. 10. 交比群中的 T_4 与 T_5. 11. $x_2^2+x_1x_3-x_2x_3=0$. 12. $u_1u_2+2u_2u_3-u_1u_3=0$. 13. (1) $9x_1+2x_2+4x_3=0$，(2). $x_1+2x_2+3x_3=0$，(3). $4x_1+7x_2-9x_3=0$. 14. (1).（2，7，-6），(2).（0，1，0），(3).（3，-3，2）. 15. (1). $x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2=0$（非退化实二阶曲线），无奇

异点，(2). $x_1'^2-x_2'^2=0$（退化实二阶曲线即两相交实直线），奇异点为（-2，-1，1），(3). $x_1'^2=0$（退化实二阶曲线即两重合实直线），奇异点为直线 $x_1-2x_2+2x_3=0$ 上的所有点．

五、1. 略． 2. 略． 3. 两点（1,1+i）、（i,-1-i）的齐次坐标为（1,1+i，1）、（i,-1-i，1），则其连线方程是 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1+i & 1 \\ i & -1-i & 1 \end{vmatrix}=0$，即

2（i-1）x_1-（i+1）$x_2+2x_3=0$，且点（1+i，-1+i）的齐次坐标（1+i，-1+i，1）满足此连线的方程，所以这三点共线.其上的实点是此连线（2i−2， -i-1，2）与其共轭虚直线（-2i−2， i-1，2）的交点，

即（$\begin{vmatrix} -i-1 & 2 \\ i-1 & 2 \end{vmatrix}$,$\begin{vmatrix} 2 & 2i-2 \\ 2 & -2i-2 \end{vmatrix}$,$\begin{vmatrix} 2i-2 & -i-1 \\ -2i-2 & i-1 \end{vmatrix}$）≡（1，2，2）.

4. 设点 P 关于线段 P_1P_2 的分割比是 λ，则 $x_0=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, y_0=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$，而点 P 在直线 $Ax+By+C=0$ 上，所以 $A(x_1+\lambda x_2)+B(y_1+\lambda y_2)+C(1+\lambda)=0$，因此分割比 $\lambda=-\dfrac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$. 5. 略. 6. $\because (r_1r_2,r_3r_4)=\dfrac{(r_3-r_1)(r_4-r_2)}{(r_4-r_1)(r_3-r_2)}$，

$=\dfrac{(r_3-r_1)\left[(r_4-r_1)-(r_2-r_1)\right]}{(r_4-r_1)\left[(r_3-r_1)-(r_2-r_1)\right]}=k$ $\therefore (r_3-r_1)(r_4-r_1)-(r_3-r_1)(r_2-r_1)=k$

$(r_3-r_1)(r_4-r_1)-k(r_2-r_1)(r_4-r_1)$，即 $(1-k)(r_4-r_1)(r_3-r_1)=(r_3-r_1)(r_2-r_1)-k(r_4-r_1)(r_2-r_1)$，两端除以 $(r_4-r_1)(r_3-r_1)(r_2-r_1)$ 得 $\dfrac{1-k}{r_2-r_1}=\dfrac{1}{r_4-r_1}-\dfrac{k}{r_3-r_1}$.当 $k=-1$ 时，$\dfrac{2}{r_2-r_1}=\dfrac{1}{r_4-r_1}-\dfrac{1}{r_3-r_1}$.

7. 若点 C 是线段 AB 中点，则（ABC）=-1，而（ABD_∞）=1，所以（AB，CD_∞）=-1.若（AB，CD_∞）=-1，而（ABD_∞）=1，所以（ABC）=-1，即点 C 是线段 AB 中点． 8.（1）设绕坐标原点的二

旋转变换为

$$T_1:\begin{cases}x'=x\cos\theta_1-y\sin\theta_1\\ y'=x\sin\theta_1+y\cos\theta_1\end{cases},\ D_1=\begin{vmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{vmatrix}=1.$$

$$T_2:\begin{cases}x''=x'\cos\theta_2-y'\sin\theta_2\\ y''=x'\sin\theta_2+y'\cos\theta_2\end{cases},\quad D_2=\begin{vmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{vmatrix}=1.$$

则 $$T_2T_1:\begin{cases}x''=x'\cos(\theta_1+\theta_2)-y'\sin(\theta_1+\theta_2)\\ y''=x'\sin(\theta_1+\theta_2)+y'\cos(\theta_1+\theta_2)\end{cases},\quad D=D_1\cdot D_2=1.$$

即任意二旋转变换之积仍为旋转变换.（2）设绕坐标原点的旋转变换为 $T:\begin{cases}x'=x\cos\theta-y\sin\theta\\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta\end{cases},\quad D=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=1$. 则其逆变换为 $T^{-1}:\begin{cases}x=x'\cos(-\theta)-y'\sin(-\theta)\\ y=x'\sin(-\theta)+y'\cos(-\theta)\end{cases},\quad D'=\begin{vmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{vmatrix}=1$. 即旋转变换的逆变换仍为旋转变换.由（1）、（2）知绕坐标原点的旋转变换构成变换群. 9. 二次曲线 $x_1x_3-x_2^2=0$ 的系数行列式 $D=1/4\neq0$，所以是非退化二次曲线，对应的线方程为 $\begin{vmatrix}0 & 0 & 1/2 & u_1\\ 0 & -1 & 0 & u_2\\ 1/2 & 0 & 0 & u_3\\ u_1 & u_2 & u_3 & 0\end{vmatrix}=0$，

展开得

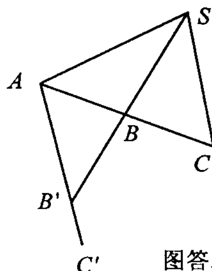
$4u_1u_3-u_2^2=0$. 10. 二次曲线 $u_1u_3-u_2^2=0$ 的系数行列式 $D=1/4\neq0$，所以是非退化二次曲线，对应的点方程为 $\begin{vmatrix}0 & 0 & 1/2 & x_1\\ 0 & -1 & 0 & x_2\\ 1/2 & 0 & 0 & x_3\\ x_1 & x_2 & x_3 & 0\end{vmatrix}=0$，展

开得 $4x_1x_3-x_2^2=0$. 11. 略. 12. 略. 13. 略. 14. 略. 15. 三点 A（0，1）、B（1，0）、C 的齐次坐标为（0，1，1）、（1，0，1）、（1，1，0），二阶曲线 $x^2-6xy+y^2+2x+2y+1=0$ 的齐次方程为：

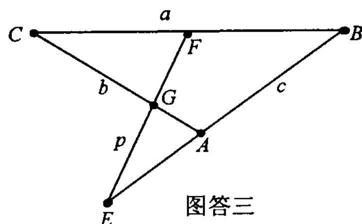
$$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0,$$

则点 A 关于二阶曲线的极线为 $-x_1+x_2+x_3=0$，点 B 关于二阶曲线的极线为 $x_1-x_2+x_3=0$，点 C 关于二阶曲线的极线为 $x_1+x_2-x_3=0$. 显然，B、C 在 A 的极线上，C、A 在 B 的极线上，A、B 在 C 的极线上，即△ABC 关于二阶曲线成自极三角形.

六、1. 略. 2. 设△SAC 为等腰三角形（$SA=SC$），作 $SB\perp AC$，过 A 作 SC 的平行线交 SB 的延长线于 B'，交 SC 的延长线于 C'（无穷远点），则 A、B、C 在中心投影下的像为 A、B'、C'，而 $(ABC)=AC/BC=2$，$(AB'C')=1$，即 $(ABC)\neq(AB'C')$（如图答二）.



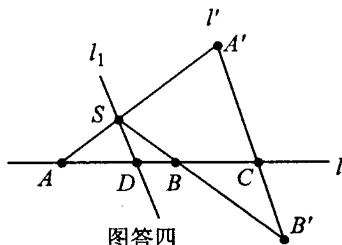
图答二



图答三

3. 如图答三所示 .

4. 如图答四；作法：（1）过 C 作任意直线 l'，在 l' 上取 A'、B' 使 $CA':CB'=-2$；（2）连接 AA'、BB' 交于 S；（3）过 S 作 l'



图答四

线 l_1 交 l 于 D；D 就是所求点.

证明：$(AB, CD) = S(AB, CD) = (A'B', CD_\infty) = (A'B'C) = CA' : CB' = -2$.

5. 由 $(AB, CD) = -1/3$，得 $(AB, DC) = -3$，此时，已知 A，B，D 三点，求作第四点 C，与第 4 题相同.

6. 略. 7. 略. 8. 略. 9. 略. 10. 略. 11. 略.

参 考 文 献

1. 朱德祥.高等几何.高等教育出版社，1983.9.

2. 梅向明，刘增贤，林向岩.高等几何.高等教育出版社，1983.11.

3. 孙泽瀛.近世几何学.高等教育出版社，1981.11.

4. 梁延堂，马世祥. 解析几何思考与训练.兰州大学出版社，2000.8.

5. H.Levey. *Projective and related geometries*,1964.

6. H.B Griffiths and P.J.Hilton. *A comprehensive textbook of classical mathematics*. 1970.

[General Information]
书名=矢量代数与射影几何
作者=马世祥编著
页数=149
SS号=11764912
DX号=
出版日期=2006年7月
出版社=兰州大学出版社